Заявка на конкурс Берштейна М.А., курс "теория групп"

Название базовой кафедры.

Кафедра проблем теоретической физики (курс читается также для студентов кафедры физики твердого тела).

Аннотация с наименованием курса, указанием его объема в часах и кратким изложением его содержания, а также — ответственного исполнителя (если курс читают два или более лекторов)

«Введение в теорию групп», 34 академических часа.

Программа

Часть 1

1. Группа перестановок.
2. Абстрактные группы. Действие группы на множестве.
3. Порядок элемента. Смежные классы. Теорема Лагранжа.
4. Изоморфизм групп. Прямое произведение групп.
5. Классы сопряженности. Описания классов сопряженности для группы S_n.

Часть 2

6. Гомоморфизм групп. Коммутант группы.
7. Представления групп. Прямая сумма представлений. Неприводимые представления.
8. Характеры представлений.
9. Тензорное произведение векторных пространств. Ограничение представления на подгруппу.

Часть 3

10. Многообразия. Задание многообразия уравнениями. Касательное пространство.
11. Группы Ли. Алгебры Ли. Касательное пространство к единице является алгеброй Ли. Экспоненциальное отображение.
12. Изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathbb{R}^3$. Представление групп Ли. Представления алгебр Ли.
13. Неприводимые представления алгебры $\mathfrak{su}(2)$. Представления групп $SU(2)$ и $SO(3)$. Спин.
14. Характеры представлений групп Ли. Коэффициенты Клебша-Гордона.

Читает М. А. Берштейн

Сведения о месте курса в учебном плане (с какого года и в каком семестре читается), с указанием веб-страницы на сайте кафедры

Курс читается в 4 семестре Читается с 2013 года (до этого читался курс с тем же названием, но с другой программой).

Страница курса [`chair.itp.ac.ru/index.php?sub=curriculum/groups`].

презентации всех лекций курса в виде pdf файла или ссылка на сайт, на котором они размещены

Материалы 2014 года размешены на сайте:
[`http://qft.itp.ac.ru/mbersht/2014.html`],
смотри также страницы 4–40 заявки.

записка о цели курса, его современности, особенностях и месте в общем учебном процессе

В курсе изучается теория групп, лежащая в основе теории симметрии. Теория групп имеют большие приложения в физике, от уже классических групп симметрий кристаллов и понятия спина как представления $SU(2)$, до нашедших свои применения в физике относительно недавно топологических инвариантов.

Курс с построен с расчетом на приложения. Видимо особенностью для, в общем математического, курса является то, что некоторые доказательства теорем опускаются и заменяются "объяснением"почему это верно, или поясняющим примером или просто ссылка на литературу. Основной упор делается на задачи и примеры, оценки выставляется на основе задач которые студенты решают дома (после каждой лекции выдается задание) и одной очной письменной работы. Также оригинальным является изучение непрерывных групп уже в начальном курсе по теории групп.

Курс опирается на уже изученные студентами математические курсы линейной алгебры и дифференциальных уравнений. Материал курса будет использоваться далее как в общих курсах (например квантовая механика), так и в более специальных (например калибровочные теории).

список рекомендуемой учащимся литературы

1. Э. Б. Винберг Курс Алгебры Главы 4, 12.
2. Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц Теоретическая физика. Том 3 Квантовая механика гл. XII.
3. Д. А. Шапиро Конспект лекций по математическим методам физики. Часть 2 (Представления групп и их применение в физике. Функции Грина)
4. М. Хамермеш Теория групп и ее применения к физическим проблема Часть 1.
5. Ж. П. Серр Линейные представления конечных групп Часть 1.
6. Э. Б. Винберг Линейные представления конечных групп Часть 1.

сведения о материалах, используемых в ходе преподавания (например, задачи для семинаров, экзаменов и индивидуальной работы учащихся)

После каждой лекции остается письменное домашнее задание, оно идет в материалах лекций после самой лекции. Студенты сдают эти задачи в течении последующей недели (можно и позже, но с понижающим коэффициентом 0.5). Также один раз проводилась очная письменная работа. Оценка выставлялась по количеству баллов набранных студентами. Все задачи есть на сайте курса (см также страницы 4–40 заявки).

CV лектора (лекторов), с приложением списка ранее прочитанных курсов и списка публикаций за последние 10 лет)

Страницы 41–44 заявки.

Лекция 1. Перестановки

Определение 1. *Перестановкой* n элементов (или *подстановкой* из n элементов) называется биекция n-элементного множества на себя. Множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ обозначается S_n.

Упражнение 1. Перемножьте перестановки $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Упражнение 2. Вычислите $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{100}$

Через $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ обозначается цикл который переводит $i_1 \mapsto i_2$, $i_2 \mapsto i_3$, $\dots$, $i_n \mapsto i_1$.

Предложение 1. Любая перестановка разбивается в произведение непересекающихся циклов.

Определение 2. *Порядком* перестановки σ называется наименьшее натуральное n такое, что $\sigma^n = e$.

Предложение 2. Если перестановка равна произведению независимых циклов длины $d_1, \dots, d_k$, то ее порядок равен НОД$(d_1, d_2, \dots, d_k)$

Определение 3. *Транспозицией* называется цикл длины 2. Обозначение: $(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & a & \dots & b & \dots & n \\ 1 & \dots & b & \dots & a & \dots & n \end{pmatrix}$

Упражнение 3. Что получится если перестановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ умножить на транспозицию (a, b) а) слева, б) справа?

Предложение 3. а) Любая перестановка может быть представлена как произведение транспозиций. б) Докажите, что любая перестановка может быть представлена как произведение транспозиций соседних элементов $(i, i+1)$ (такие транспозиции называются элементарными).

Определение 4. Инверсией (беспорядком) перестановки σ называется такая пара чисел i, j, что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$. Количество инверсий обозначается $|\sigma|$. Перестановка называется четной, если число инверсий четное, в противном случае перестановка называется нечетной.

Упражнение 4. Найдите четность всех перестановок 3 элементов.

Предложение 4. Умножение на элементарную транспозицию либо увеличивает либо уменьшает число беспорядков на 1.

Теорема 5. Пусть σ разложено в произведение элементарных транспозиций $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$. Тогда k больше либо равно $|\sigma|$, причем существует разложение в котором $k = |\sigma|$. Кроме того $k \equiv |\sigma| \pmod 2$

Предложение 6. Произведение четных перестановок — четное.
Произведение нечетной и четной перестановок — нечетное.
Произведение нечетных перестановок — четное.

Предложение 7. Любая транспозиция является нечетной перестановкой.

Теорема 8. Пусть перестановка разложена в произведение транспозиций. Тогда если количество ее четность равна четности количества этих транспозиций.

Домашнее задание

Решения надо прислать или принести до начала лекции 17 февраля. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

Упражнение 1. Пусть $\alpha = (1,3,5)(2,4,7)$, $\beta = (1,4,7)(2,3,5,6)$ (перестановки даны в разложении по непересекающимся циклам). Найдите произведение $\alpha\beta$.

Упражнение 2. Найти порядок перестановки $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 5\,6\,4\,7\,2\,1\,3 \end{pmatrix}$.

Задача 3. а) Перестановка σ является циклом длины d. Разложите ее в произведение транспозиций. б) Найдите четность σ.

Задача 4. Перестановку σ умножили на транспозицию слева и получили цикл длины 3. Каким может быть циклический тип σ?

Задача 5. Каких перестановок в S_n больше — четных или нечетных?

Материалы, а также полезная информация есть на сайте:
[`qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html`]

Лекция 2. Группы

Определение 1. *Группой* называется множество G с бинарной операцией умножение если выполнены следующие аксиомы:
1) (Ассоциативность) $\forall a, b, c \in G$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
2) (Существование единицы) $\exists e \in G : \forall a \in G$, $a \cdot e = e \cdot a = a$
3) (Обратный элемент) $\forall a \in G$, $\exists b$ такой что $a \cdot b = e$. (Такой элемент называется обратным и обозначается a^{-1}).

Определение 2. Группа называется *коммутативной* (или *абелевой*), если дополнительно выполнена аксиома
4) (Коммутативность) $\forall a, b \in G$, $a \cdot b = b \cdot a$.
Операцию в коммутативных группах обычно называют сложением и обозначают $+$.

Примеры групп
1 Группа целых чисел $\mathbb{Z}$ с операцией сложения.
2 Группа всех остатков по модулю n с операцией сложения. Обозначается $\mathbb{Z}_n$.
3 Группа матриц $n \times n$ с действительными коэффициентами и ненулевым определителем. Обозначение $GL(n, \mathbb{R})$. Аналогично $GL(n, \mathbb{C})$.
4 Группа движений пространства. Обычно рассматриваются движения сохраняющие некоторую точку, которую удобно считать началом координат.
а) Движения плоскости сохраняющие начало координат: повороты вокруг начала координат (сохраняют ориентацию) и симметрии относительно прямых проходящих через начало координат (меняют ориентацию).
б) Движения трехмерного пространства сохраняющие начало координат: повороты вокруг осей проходящих через начало координат (сохраняют ориентацию) и композиции симметрии относительно плоскости и поворота вокруг перпендикулярной ей оси, плоскость и ось пересекаются в начале координат (меняют ориентацию).
5. Группа перестановок S_n.
6. Циклическая группа из n элементов C_n. Элементы группы можно представлять как повороты на угол $\frac{2\pi k}{n}$ вокруг начала координат.

Определение 3. Подмножество $H \subset G$ называется *подгруппой*, если $\forall a, b \in H$ $a \cdot b \in H$ и $a^{-1} \in H$.

Примеры подгрупп
1. Четные перестановки образуют подгруппу в группе всех перестановок. Обозначается эта группа A_n.
2. а) Ортогональные матрицы с ненулевым определителем $O(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$. Матрицы с опредилителем 1 $SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$. Ортогональные матрицы с единичным определителем $SO(n, \mathbb{R})$

б) Унитарные матрицы $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$. Унитарные матрицы с единичным определителем $SU(n)$.

3 а) Группа симметрий на плоскости правильного многоугольника D_n. Удобно записывать элементы как произведения поворота на угол $2\pi/n$ ρ и одной осевой симметрии s. Всего $2n$ элементов.

б) Группа симметрий правильного многогранника т.е. группа движений трехмерного пространства переводящих правильный многогранник в себя.

Абстактную группу можно задавать таблицей умножения. Ниже приведены таблицы умножения для групп D_3, S_3. Обозначения: ρ — поворот на угол $\frac{2\pi}{3}$, s — отражение, перестановки записаны в виде разложения по циклам.

D_3

	e	ρ	ρ^2	s	$s\rho$	$s\rho^2$
e	e	ρ	ρ^2	s	$s\rho$	$s\rho^2$
ρ	ρ	ρ^2	e	$s\rho^2$	s	$s\rho$
ρ^2	ρ^2	e	ρ	$s\rho$	$s\rho^2$	s
s	s	$s\rho$	$s\rho^2$	e	ρ	ρ^2
$s\rho$	$s\rho$	$s\rho^2$	s	ρ^2	e	ρ
$s\rho^2$	$s\rho^2$	s	$s\rho$	ρ	ρ^2	e

S_3

	e	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(1,3)$
e	e	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(1,3)$
$(1,2,3)$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	e	$(1,3)$	$(1,2)$	$(2,3)$
$(1,3,2)$	$(1,3,2)$	e	$(1,2,3)$	$(2,3)$	$(1,3)$	$(1,2)$
$(1,2)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(1,3)$	e	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
$(2,3)$	$(2,3)$	$(1,3)$	$(1,2)$	$(1,3,2)$	e	$(1,2,3)$
$(1,3)$	$(1,3)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	e

Предложение 1. В таблице умножения группы в каждой строчке встречаются все элементы группы по одному разу. Аналогично про столбцы.

Определение 4. Две группы G и H называются *изоморфными*, если существует биекция $\varphi\colon G \to H$ такая, что $\forall a, b \in G$, $\varphi(a \cdot_G b) = \varphi(a) \cdot_H \varphi(b)$.

Предложение 2. а) Докажите, что группа S_3 изоморфна группе D_3.
б) Группа $\mathbb{Z}_6$ им не изоморфна.

При изоморфизме групп таблицы умножения переходят друг в друга как видно выше для групп D_3 и S_3.

Предложение 3. Группа $\mathbb{Z}_n$ изоморфна C_n.
Доказательство: при изоморфизме остаток r, $0 \leqslant r < n$ переходит в поворот на угол $\frac{2\pi r}{n}$. ■

Пример. Группа всех остатков по модулю n взаимно простых с n с операцией умножения. Обозначается $\mathbb{Z}_n^*$.

Предложение 4. Группа $\mathbb{Z}_5^*$ изоморфна группе C_4.

Доказательство: при изоморфизме остатки по модулю 5 $1, 2, 4, 3$ переходят в повороты на углы $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. То, что это изоморфизм видно из таблицы умножения:

$\mathbb{Z}_5^*$

	1	2	4	3
1	1	2	4	3
2	2	4	3	1
4	4	3	1	2
3	4	1	2	4

C_4

	e	ρ	ρ^2	ρ^3
e	e	ρ	ρ^2	ρ^3
ρ	ρ	ρ^2	ρ^3	e
ρ^2	ρ^2	ρ^3	e	ρ
ρ^3	ρ^3	e	ρ	ρ^2

■

Определение 5. *Прямым произведением* групп G и H называется множество пар $G \times H = \{(g, h) | g \in G, h \in H\}$ с операцией $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$.

Предложение 5. Группа $\mathbb{Z}_8^*$ изоморфна группе $C_2 \times C_2$.
Доказательство: см. таблицы умножения.

$\mathbb{Z}_8^*$

	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$C_2 \times C_2$

	(e, e)	(e, ρ)	(ρ, e)	(ρ, ρ)
(e, e)	(e, e)	(e, ρ)	(ρ, e)	(ρ, ρ)
(e, ρ)	(e, ρ)	(e, e)	(ρ, ρ)	(ρ, e)
(ρ, e)	(ρ, e)	(ρ, ρ)	(e, e)	(e, ρ)
(ρ, ρ)	(ρ, ρ)	(ρ, e)	(e, ρ)	(e, e)

■

Предложение 6. Группы $C_2 \times C_2$ и C_4 не изоморфны.
Доказательство: В группе $C_2 \times C_2$ любой элемент в квадрате равен 1, а в группе C_4 нет. ■

Теорема 7. Любая конечная абелева группа изоморфна произведению циклических групп.

Домашнее задание

Решения надо прислать или принести до начала лекции 24 февраля. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

Задача 1. Докажите, что группа Z_{10}^* изоморфна C_4.

Задача 2. Верно ли, что группа Z_{15}^* циклическая?

Задача 3. Найдите все подгруппы в группе целых чисел $\mathbb{Z}$

Задача 4. Докажите, что группа симметрий тетраэдра изоморфна S_4. Каким симметриями тетраэдра соответствуют циклы длины 4?
Указание: Это не симметрия относительно плоскости, а более сложное преобразование.

Материалы, а также полезная информация есть на сайте:
[`qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html`]

Лекция 3. Группы остатков. Теорема Лагранжа

Количеством элементов в группе называется *порядком группы*. Обозначение: $|G|$.

Определение 1. *Порядком элемента* $g \in G$ называют наименьшее натуральное n такое, что $g^n = e$. Если такого n не существует, то говорят что порядок равен бесконечности.

Предложение 1. Если группа G — конечная, то порядок любого $g \in G$ тоже конечный.
Доказательство: Рассмотрим элементы $e, g, g^2, \ldots$. Их количество конечно, значит какой-то $g^i = g^j$. Значит, $g^{i-j} = e$. ■

Предложение 2. Групп $C_2 \times C_2 \times C_2$, $C_2 \times C_4$ и C_8 попарно не изоморфны.
Доказательство: В группе $C_2 \times C_2 \times C_2$ все элементы имеют порядок 1 или 2, в группе $C_2 \times C_4$ встречаются порядки 1,2,4, в группе C_8 встречаются порядки 1,2,4,8. ■

Предложение 3. Группа G из n элементов изоморфна C_n тогда и только тогда, когда в ней есть элемент g порядка n.
Доказательство: Представим себе C_n как группу с элементами $e\rho, \ldots, \rho^{n-1}$. Изоморфизм строится так: элемент $\rho^k \in C_n$ переходит в $g^k \in G$. ■

Предложение 4 (Следствие). Группы $C_2 \times C_3$ и C_6 изоморфны.
Доказательство: в группе $C_2 \times C_3$ есть элемент порядка 6. ■

Определение 2. *Действие группы* G *на множестве* X это отображение $\rho : G \times X \to X$ такое, что:

a) $\forall g, h \in G,\ x \in X,\ \rho(g, \rho(h, x)) = \rho(gh, x)$; b) $\forall x \in X,\ \rho(e, x) = x$.

Для упрощения обозначений обычно действие группы записывается как $(g, x) \mapsto gx$.

Определение 3. Пусть группа G действует на множестве X.
Орбитой элемента $x \in X$ называется множество Gx. Множество всех орбит обозначается X/G.
Стабилизатором элемента $x \in X$ называется множество $G_x = \{g \in G | gx = x\}$.

Предложение 5. Для любой точки $x \in X$ стабилизатор G_x является подгруппой в G.

Предложение 6. Любые две орбиты Gx и Gy или не пересекаются или совпадают.

Теорема 7. Пусть G — конечная группа. Для любой точки $x \in X$ верно $|G| = |Gx| \cdot |G_x|$.

Доказательство: каждому элементу группы G соответствует элемент орбиты gx. Причем $gx = g'x$ если и только если g и g' отличаются на элемент стабилизатора $g'^{-1}g \in G_x$ или, эквивалентно, $g'^{-1} \in gG_x$. Значит каждому элементу орбиты соответствует ровно G_x элементов группы, откуда $|Gx| \cdot |G_x| = |G|$. ■

Предложение 8. Пусть $y = gx$ элемент орбиты. Тогда стабилизатор $G_y = gG_xg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in G_X\}$.

Примеры

1 Группа $G = S_n$, множество $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда если x — произвольное натуральное число от 1 до n, то орбита Gx это все X. стабилизатор G_x — это группа перестановок всех чисел от 1 до n кроме x, стабилизатор G_x изоморфен S_{n-1}. Теорема 7 дает известное нам равенство: $n! = n \cdot (n-1)!$.

2 Группа $G = D_n$ симметрий правильного n-угольника, множество X – множество вершин правильного n-угольника. Тогда если A — произвольная вершина, то орбита GA это все X, стабилизатор G_A — это группа состоящая из тождественного преобразования и симметрии. Теорема 7 дает равенство: $|D_n = n \cdot 2$.

3 Группа G симметрий куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $X = \{A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1\}$ — множество вершин куба. Тогда орбита GA состоит из всех 8 вершин куба. А стабилизатор G_A состоит из 6 преобразований сохранящих A – тождественное, два поворода вокруг оси AC_1, симметрии относительно плоскостей ABC_1, ADC_1, AA_1C_1. Тогда $|G| = 6 \cdot 8 = 48$. Порядок группы G_+ — собственных движений куба равна 24.

Пусть G конечная группа, $H \subset G$ подгруппа. Рассмотрим в качестве множества X группу G и действите H на X умножение слева $(h, x) \mapsto hx$. Тогда стабилизатор любой точки тривиален, значит все орбиты состоят из $|H|$ элементов. Следовательно $|G| = |H| \cdot |G/H|$

Теорема 9 (Лагранж). Пусть G — конечная группа, H — подгруппа. Тогда $|H|$ делит порядок $|G|$.

Предложение 10 (Следствие). Пусть G — конечная группа. Тогда для любого элемента $g \in G$ порядок g делит $|G|$.

Доказательство: рассмотрим подгруппу $e, g, g^2, \ldots$ и применим теорему Лагранжа. ■

Предложение 11 (Малая теорема Ферма). Если $a \in \mathbb{Z}$, и НОД$(a,p) = 1$, то $a^{p-1} - 1$ делится на p.

Доказательство: пусть элемент соответствующий a в $\mathbb{Z}_p^*$ имеет порядок d, $a^d \equiv 1 \pmod{p}$. По предыдущему следствию $|\mathbb{Z}_p^*| = p - 1$ делится на d, значит $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. ■

Предложение 12 (Теорема Эйлера). Обозначим $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$. Тогда если НОД$(a, n) = 1$, то $a^{\varphi(n)} - 1$ делится на n
Доказывается аналогично прошлому пункту.

Домашнее задание

Решения надо прислать или принести до начала лекции 3 марта. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

Упражнение 1. Группа S_4 действует на пространстве многочленов от 4 переменных x_1, x_2, x_3, x_4 переставляя переменные. Найдите стабилизатор многочлена $x_1x_2 + x_3x_4$.

Задача 2. Группа S_3 действует на себе сопряжениями $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$. Найдите стабилизатор каждого элемента. Найдите орбиты для этого действия.

Задача 3. Пусть p — простое. Докажите, что любая группа порядка p изоморфна C_p.

Задача 4. а) Через D_{nh} обозначим группу симметрий прямоугольной призмы с основанием правильный n угольник. Найдите порядок группы D_{nh}.
Другое описание группы D_{nh} — группа движений трехмерного пространства, сохраняющих правильный многоугольник с n сторонами в плоскости .

б) Изоморфны ли группы D_{3h} и D_6?

Задача 5. При каких m, n группы C_{mn} и $C_m \times C_n$ изоморфны?

Задача 6. * Пусть p — простое число. Пусть X — множество раскрасок вершин правильного p-угольника в a цветов. Группа C_p действует на X поворотами. Найдите возможные длины орбит. Найдите количество орбит.
Переформулировка: Каким число способов можно раскрасить в a цветов карусель из p вагончиков, где p — простое.

Материалы, а также полезная информация есть на сайте:
[qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html]

Лекция 4. Классы сопряженности, гомоморфизмы.

Определение 1. Группа G действует на себе *сопряжениями* по формуле $(g,x) \mapsto gxg^{-1}$.
Орбиты для действия группы на себе сопряжениями называются *классами сопряженности.*

Надо проверить корректность определения, т.е. что получается действительно действие:

$$g_1 g_2(x) g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1 g_2(x)(g_1 g_2)^{-1}, \text{ так как } (g_1 g_2)^{-1} = g_2^{-1} g_1^{-1}.$$

Примеры

1 Если группа G коммутативная, то каждый класс сопряженности состоит из одного элемента.
2 В группе S_3 есть три класса сопряженности: e; $(1,2)$, $(1,3)\,(2,3)$; $(1,2,3)$, $(1,3,2)$.
3 Пусть G — группа движений $\mathbb{R}^3$, S_α симметрия относительно плоскости α, g — некоторое движение. Тогда gSg^{-1} является симметрией относительно плоскости $R\alpha$.
Пусть R — поворот вокруг оси a на угол φ, g — некоторое движение. Тогда gRg^{-1} является поворотом поворот вокруг оси ga на угол φ.
4 Пусть G — группа матриц $GL(n,C)$. Тогда две матрицы A, B сопряжены если и только если у них одинаковые жордановы нормальны формы.
Пусть G — группа унитарных матриц $U(n,C)$. Тогда две матрицы A, B сопряжены если и только если у них одинаковые характеристические многочлены.

Предложение 1. Пусть $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)(j_1, j_2, \dots, j_l)\dots$ и α произвольная перестановка. Тогда $\alpha\sigma\alpha^{-1} = (\alpha(i_1), \alpha(i_2), \dots, \alpha(i_k))(\alpha(j_1), \alpha(j_2), \dots, \alpha(j_l))\dots$

Предложение 2 (Следствие). Две перестановки сопряжены в группе S_n тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую цикловую структуру, т.е. их разложения в произведения независимых циклов для любого k содержат одинаковое число циклов длины k.

Предложение 3 (Следствие). Количество классов сопряженности равно количеству представлений n в виде суммы положительных целых чисел. Обозначается эта последовательность $p(n)$, первые числа равны $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5, p(5) = 7, p(6) = 11$.

Определение 2. Даны две группы G, H. Отображение $\varphi\colon G \to H$ называется *гомоморфизмом* групп, если $\forall a, b \in G$, $\varphi(a \cdot_G b) = \varphi(a) \cdot_H \varphi(b)$.

Предложение 4. При любом гомоморфизме а) $\phi(e) = e$; б) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$;

Определение 3. Пусть дан гомоморфизм групп $\phi\colon G \to H$. *Ядром* гомоморфизма (обозначается $\mathrm{Ker}(\varphi)$) называется $\{g \in G | \phi(g) = e\}$, . *Образом* гомоморфизма (обозначается $\mathrm{Im}(\varphi)$ называется $\{h \in H | \exists g \in G \phi(g) = h\}$.

Предложение 5. а) Ядро гомоморфизма является подгруппой в G. б) Образ гомоморфизма является подгруппой в H.

Предложение 6. Условие $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ равносильно условию $g_1^{-1} g_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

Теорема 7. Для любого гомоморфизма конечных групп

$$|G| = |\mathrm{Ker}(\varphi)| \cdot |\mathrm{Im}(\varphi)|$$

Доказательство: Группа G действует на множестве $\mathrm{Im}(\varphi)$ по формуле $(g, x) \mapsto (\varphi(g)x)$. Орбитой является все множество $\mathrm{Im}(\varphi)$. Стабилизатором элемента является ядро φ. Поэтому теорема следует из формулы для длины орбиты из прошлой лекции. ■

Примеры

0. Для любых групп G, H есть тривиальных гомоморфизм $\varphi(g) = e$, $\forall g \in G$.
1. Группа $G = S_n$, $H = C_2 \equiv \{-1, 1\}$. Гомоморфизм определен по формуле $\varphi(\sigma) = 1$ для четных перестановок, $\varphi(\sigma) = -1$ для нечетных. Ядро гомоморфизма $\mathrm{Ker}(\varphi)$ это четные перестановки A_n. Из предыдущей теоремы следует, что $|A_n| = |S_n|/2 = n!/2$.
2. Группа $G = GL(n, \mathbb{C})$, $H = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Гомоморфизм определен по формуле $\varphi(A) = \det(A)^n$
3. Пусть $G = \mathbb{R}$ с операцией сложения, $H = \mathbb{R}_{>0}$ с операцией умножения. Тогда любой гомоморфизм имеет вид $\varphi_\lambda(x) = e^{\lambda x}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть $G = \mathbb{R}$ с операцией сложения, $H = U(1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ с операцией умножения. Тогда любой гомоморфизм имеет вид $\varphi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Пусть $G = C_n$, $H = \mathbb{C}^*$. Тогда любой гомоморфизм задается образом $\rho \in C_n$, при этом $\varphi(\rho)^n = 1$. Откуда $\varphi_k(\rho) = e^{\frac{2\pi i}{n} k}$, где $0 \leqslant k < n$.
4. Пусть $G = C_n \times C_m$, $H = \mathbb{C}^*$. Тогда любой гомоморфизм задается образами элементов (ρ, e) и (e, ρ). Как видно из прошлого примера, любой такой гомоморфизм задается двумя числами $0 \leqslant k < n$, $0 \leqslant l < m$: $\varphi_{k,l}(\rho, e) = e^{\frac{2\pi i}{n} k}$, $\varphi_{k,l}(e, \rho) = e^{\frac{2\pi i}{m} l}$.

Предложение 8. Для любого гомоморфизма в абелеву группу элементы сопряженные элементы имеют один образ $\phi(x) = \phi(gxg^{-1})$.
5. Пусть $G = S_3$, $H = \mathbb{C}^*$. Тогда любая транспозиция переход либо в 1 либо в -1. По прошлому предложению они все должны переходить в один и тот же элемент. Тогда, если они все переходят 1, то и любой тройной цикл переходит

в 1 и получается тривиальнылй гомоморфизм. Если они все транспозиции переходят в -1 то получается гомоморфизм четности.

Домашнее задание

Решения надо прислать или принести до начала лекции 17 марта. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

Упражнение 1. Сколько существует гомоморфизмов из группы C_3 в группу S_4?

Задача 2. а) Найдите классы сопряженности в группе D_5.
б) Найдите все гомоморфизмы из D_5 в $\mathbb{C}^*$.

Задача 3. а) Докажите, что действия группы G на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ находятся в биекции с гомоморфизмами $G \to S_n$.
б) **[Теорема Кэли]** Докажите, что любая конечная группа изоморфна подгруппе в симметрической группе S_n для какого-то n.
Указание: используйте действие группы G на себе умножениями слева: $(g, x) \mapsto gx$.

Задача 4. Пусть G — группа вращений (движений сохраняющих ориентацию) куба.
а) Постройте нетривиальный гомоморфизм из G в S_4 используя действие G на множестве диагоналей куба. Является ли он изоморфизмом?
б) Опишите классы сопряженности в группе G.

Задача 5. Докажите, что тройные циклы $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ сопряжены как элементы S_4, но не сопряжены как элементы A_4.

Материалы, а также полезная информация есть на сайте:
[qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html]

Некоторые решения задач из лекции 3.

Упражнение 1. Группа S_4 действует на пространстве многочленов от 4 переменных x_1, x_2, x_3, x_4 переставляя переменные. Найдите стабилизатор многочлена $x_1x_2 + x_3x_4$.

Решение В орбите будет 3 элемента $x_1x_2 + x_3x_4, x_1x_3 + x_2x_4, x_1x_4 + x_2x_3$. Значит порядок стабилизатора равен $|S_4|/3 = 8$. Элементы стабилизатора:

$$e; (1,2); (3,4); (1,3,2,4); (1,4,2,3); (1,2)(3,4); (1,3)(2,4); (1,4)(2,3)$$

■

Определение 1. Центр группы G это множество $Z(G) = \{g \in G | gx = xg, \forall x \in G\}$.

Легко видеть, что центр группы G является подгруппой.

Задача 4. а) Через D_{nh} обозначим группу симметрий прямоугольной призмы с основанием правильный n угольник. Найдите порядок группы D_{nh}. *Другое описание группы D_{nh} — группа движений трехмерного пространства, сохраняющих правильный многоугольник с n сторонами в плоскости .*

б) Изоморфны ли группы D_{3h} и D_6?

Решение а) Докажем изоморфизм $D_{nh} \cong D_n \times C_2$. А именно, подгруппа $D_n \subset D_{nh}$ состоит из симметрий которые сохраняют правильный n-угольник в плоскости Oxy, а полупространства на которые она разбивает пространства не переставляются. А подгруппа C_2 порождается симметрией относительно плоскости .

Из этого изоморфизма следует, что $|D_{nh}| = 2n$.

б) Будем решать более общую задачу про изоморфизм D_{2n} и D_{nh}, для нечетного n. Внутри групп D_{2n} есть подгруппа D_n — симметрий правильного n-угольника который вложен в правильный $2n$-угольник. И есть подгруппа C_2 лежащая в центре — единичный элемент и центральная симметрия. Эти две подгруппы не пересекаются (так как n — нечетно), эти две подгруппы коммутируют и порождают D_{2n}, значит группа $D_{2n} \cong D_n \times C_2$. ■

Задача 6. * Пусть p — простое число. Пусть X — множество раскрасок вершин правильного p-угольника в a цветов. Группа C_p действует на X поворотами. Найдите возможные длины орбит. Найдите количество орбит. *Переформулировка: Каким число способов можно раскрасить в a цветов карусель из p вагончиков, где p — простое.*

Ответ Число орбит равно $\frac{a^p - a}{p} + a$. ■

Так как число орбит всегда целое, то мы доказали, что $a^p - a$ всегда делится на p.

Лекция 5. Коммутант. Представления групп.

Определение 2. Пусть S — какое-либо подмножество группы G. Подгруппой *порожденной* S называется множество $\langle S \rangle$ произведений вида.

$$g_1^{\epsilon_1} g_2^{\epsilon_2} \dots g_k^{\epsilon_k} \qquad (g_1, g_2, \dots, g_k \in S, \;\; \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k = \pm 1)$$

Примеры

1 Группа S_n порождена транспозициями.

2 а) Группа D_n порождена отражением s и поворотом ρ.

б) Группа D_n порождена двумя отражениями относительно соседних осей s и $s\rho$.

3 Группа движений плоскости порождается симметриями относительно прямых.

Предложение 1. Для любого гомоморфизма из G в абелеву группу элементы вида $xyx^{-1}y^{-1}$ лежат в ядре.

Определение 3. Подгруппа порожденная элементами вида $xyx^{-1}y^{-1}$ называется коммутантом группы G. Выражение $xyx^{-1}y^{-1}$ называется коммутатором элементов x, y. Коммутант группы G обозначается $[G, G]$.

Предложение 2. Для любого гомоморфизма из G в абелеву группу коммутант $[G, G]$ лежит в ядре.

Примеры

0 Пусть G абелева, тогда коммутант G это e.

1 Пусть $G = S_3$. Ясно что все элементы вида $xyx^{-1}y^{-1}$ являются четными перестановками. Легко проверить, что если $x = (1, 2)$, $y = (1, 3)$, то $xyx^{-1}y^{-1}$ — тройной цикл.

2 Пусть $G = D_n$. Группа D_n порождена элементами ρ, s с соотношениями $\rho^n = e, s^2 = e, \rho s \rho s = e$. Тогда коммутатор двух отражений $s(s\rho^i)s(s\rho^i) = \rho^{2i}$, коммутатор отражения и поворота $s\rho s^{-1}\rho^{-1} = \rho^{-2}$. Таким образом коммутант состоит из четных степеней ρ.

Если n — нечетное, то четные степени ρ это все повороты, т.е. коммутант совпадает с C_n. Если n — четное, то так получается половина всех поворотов т.е. подгруппа $C_{n/2}$.

3 Пусть $G = S_n$. Ясно что все элементы вида $xyx^{-1}y^{-1}$ являются четными перестановками. Также легко получить все тройные циклы как коммутатор пересекающихся транспозиций (i, j) и (j, k). Тройные циклы порождают всю группу четных перестановок A_n, см задачу ниже.

Какие могут быть гомоморфизмы из S_n в $\mathbb{C}^*$? При любом таком гомоморфизме все четные перестановки должны перейти в 1, так как это коммутант. Транспозиция $(1, 2)$ переходит в ± 1, и все нечетные перестановки туда-же так как отличаются на умножение на четную. Значит есть только два гомоморфизма из S_n в $\mathbb{C}^*$ — тривиальный и знаковый.

Определение 4. Пусть G — конечная группа, V конечномерное комплексное векторное пространство. Гомоморфизм групп $\rho : G \to Gl(V)$ называется (конечномерным, комплексным) *представлением группы* G. Пространство V называется *пространством представления*. Размерность $\dim V$ называется *размерностью представления*.

Если в пространстве V выбран базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то можно считать, что представление задает гомоморфизм $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$.

В частности одномерные представления это тоже самое, что и гомоморфизмы из G в $\mathbb{C}^*$.

Определение 5. Пусть дана группа G и два ее векторных представления $\rho_1 \colon G \to GL(V_1)$ и $\rho_2 \colon G \to Gl(V_2)$. Изоморфизмом представлений называется изоморфзим векторных пространств $\varphi \colon V_1 \to V_2$ коммутирующий с действием группы:

$$\varphi(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)\varphi(v)$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "\varphi"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

В терминах матриц это означает, что для любого g матрицы $\rho_1(g)$ и $\rho_2(g)$ сопряжены: $\rho_1(g) = \phi\rho_2(g)\phi^{-1}$.

Примеры

1 [Тривиальное представление] Одномерное представление при котором для любого $g \in G$, $\rho(g) = 1$.

2 Группа S_n, пространство $\mathbb{C}^n$. Группа действует перестановкой базисных векторов.

Пусть $n = 3$. Тогда это перестановочное представление S_3 задается матрицами:

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1,2,3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1,3,2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1,2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1,3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2,3) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 (Перестановочное представление) Пусть группа G действует на множестве M. Тогда аналогично предыдущему примеру есть представление группы G в векторном пространстве с базисом e_m, где $m \in M$.

4 (Регулярное представление) Пусть G состоит из n элементов. Пространство $V = \mathbb{C}^n$ с базисом e_g занумерованным элементами группы G. Группа действует на V по формуле $g_1 e_{g_2} = e_{g_1 g_2}$.

Например регулярное представление C_3 задается матрицами:

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определение 6. Подпространство $U \subset V$ называется подпредставлением, если оно является G инвариантным, т.е. для если любых $g \in G, u \in U$ выполняется $\rho(g)u \in U$.

Например подпространство натянутое на вектор $(1, 1, 1)$ в регулярном представлении C_3 является инвариантным.

Домашнее задание

Решения надо прислать или принести до начала лекции 24 марта. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

Задача 1. а) Пусть G — группа всех движений сохраняющих куб. Докажите, что $G \cong S_4 \times C_2$. б) Найдите коммутант G.

Задача 2. Докажите, что у группы D_n при четном n существует ровно 4 одномерных представления. Напишите эти представления явно.

Задача 3. Докажите, что группа A_n порождается тройными циклами.

Задача 4. Найдите инвариантные подпространства регулярного представления группы C_3.

Задача 5. Пусть $g \in G$ имеет порядок n, $\rho\colon G \to GL(V)$ конечномерное представление группы G. Какими могут быть собственные значения $\rho(g)$?

Материалы, а также полезная информация есть на сайте:
[qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html]

Некоторые решения задач из лекция 5.

Задача 3. Докажите, что группа A_n порождается тройными циклами.

Решение Докажем, что произвежение любых двух транспозиций лежит в группе порожденной тройными циклами. Если эти транспозиции пересекаются, то $(a,b)(b,c) = (a,b,c)$ — тройной цикл. Если не пересекаются, то $(a,b)(c,d) = (a,b)(b,c)(b,c)(c,d) = (a,b,c)(b,c,d)$ — произведение тройных циклов.

Теперь рассмотрим любую перестановку $\sigma \in A_n$ и разложим ее в произведение транспозиций. $\sigma = \tau_1 \dots \tau_{2n}$ (их будет четное число так как σ четная). По доказанному выше любое произведение $\tau_{2i-1}\tau_{2i}$ лежит в подгруппе порожденной тройными циклами, значит и все A_n лежит в группе порожденной тройными циклами. ■

Задача 4. Найдите инвариантные подпространства регулярного представления группы C_3.

Решение Эти подпространства должны быть инвариантны относительно действия оператора ρ который задач матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что этого условия достаточно так как подпространства инвариантные относительно действия ρ будут также инвариантными относительно e и ρ^2. Собственные значения оператора ρ равны $1, \varepsilon, \varepsilon^2$, где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Соответствующие собственные вектора равны $(1,1,1); (1,\varepsilon,\varepsilon^2); (1,\varepsilon^2,\varepsilon$ и порождают одномерные инвариантные подпространства. Двумерные инвариантные относительно ρ подпространства должны быть натянуты на собственные вектора ρ. ■

Лекция 6. Характеры представлений.

Определение 1 (Прямая сумма представлений). Пусть дана группа G и два ее векторных представления V_1, ρ_1 и V_1, ρ_1. Тогда пространство $V = V_1 \oplus V_2$ также имеет структуру представления группы G в котором g переходит в оператор заданный блочной матрицей $\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$.

Примеры

1 Рассуждения выше показывают, что регулярное представление группы C_3 изоморфно прямой сумме одномерных представлений при которых ρ переходит в $1, \varepsilon, \varepsilon^2$.

На матричном языке это означает, что представления заданные матрицами a) и b) ниже изоморфны

$$a)\quad e \mapsto \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \rho \mapsto \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \quad \rho^2 \mapsto \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$b)\quad e \mapsto \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \rho \mapsto \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\varepsilon&0\\0&0&\varepsilon^2\end{pmatrix} \quad \rho^2 \mapsto \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\varepsilon^2&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix}$$

2 Перестановочное представление S_n разлагается в прямую сумму $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$, где V_1 — одномерное пространство порожденное вектором $v = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, $V_2 = \{v = \sum x^i e_i | \sum x^i = 0\}$.

Определение 2. Представление V называется *неприводимым*, если у него нет подпредставлений отличных от 0 и V.

Ясно, что любое одномерное представление неприводимо.

Предложение 1. Представление V_2 являются неприводимыми.

Доказательство Очевидно, что пространство V_2 порождено векторами $e_i - e_j$, в качестве базиса можно взять например вектора $e_1 - e_i$.

Будем доказывать предложение от противного, пусть существует подпредставление $U \subset V_2$. Пусть $u \in U$, произвольный вектор, $u = \sum x^i e_i$. Пусть какие-то две координаты не равны, скажем $x^1 \neq x^2$. Обозначим через u' вектор который получается из u действием транспозиции $(1, 2)$. Тогда вектор $u - u' = (x^1 - x^2)(e_1 - e_2)$ лежит в U. Отсюда, деля на $x^1 - x^2$ и действуя группой S_n получаем, что все вектора вида $e_i - e_j$ лежат в U, значит U совпадает с V.

Если все x^i равны, то он все равным нулю и $U = 0$. ■

Теорема 2 (Машке). Любое конечномерное комплексное представление V конечной группы G разлагается в прямую сумму неприводимых представлений $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$.

Доказательство. Индукции по размерности представления V. База очевидна — любое одномерно представление неприводимо.

Переход. Если V – неприводимо, то все доказано. Если нет, то рассмотрим какое-то подпредставление $U \subset V$ и построим подпредставление U' такое, что $V = U \oplus U'$. По предположению индукции U и U' разлагаются в прямую сумму неприводимых.

Пространство U' строится так. Рассмотрим на V произвольную положительно определенную эрмитову форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и усредним ее по группе $\langle \cdot, \cdot \rangle^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle gx, gy \rangle$. Тогда $\langle \cdot, \cdot \rangle^G$ инвариантна относительно группы G т.е. $\langle hx, hy \rangle^G = \langle x, y \rangle^G$ для любых $x, y \in V$, $h \in G$. Значит ортогональное дополнение $U^\perp$ является подпредставлением V и $V = U \oplus U^\perp$. ■

Определение 3. Пусть дано представление $\rho\colon G \to GL(V)$. Характером представления называется функция $\chi(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$, где Tr — это след матрицы.

Предложение 3 (Простейшие свойства). а) Характеры изоморфных представлений совпадают.
б) Характеры сопряженных элементов x и gxg^{-1} равны.
в) Характер прямой суммы представлений равен сумме характеров

$$\chi_{V_1 \oplus V_2}(g) = \chi_{V_1}(g) + \chi_{V_2}(g).$$

г) $\chi_V(e) = \dim(V)$.

Пусть дана группа G. Обозначим характеры ее неприводимых представлений $\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(k)}$, пусть их размерности равны $d_1, \ldots, d_k$. Также обозначим через $C_1, C_2, \ldots, C_l$ классы сопряженности в группе G, через h_i обозначим представителей этих классов $h_i \in C_i$.

Рассмотрим пространство Ξ состоящее из функций на группе инвариантных на классах сопряженности. Из предыдущего следует, что характеры всех представлений лежат в пространстве Ξ. Другой пример этой функции γ_i равные 1 на классе C_1 и нулю на других классах. Таких функций l штук $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$, они образуют базис в пространстве Ξ.

Введем эрмитово скалярное произведение на пространстве Ξ:

$$\langle \phi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)\overline{\psi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{l} |C_i| \cdot \phi(h_i)\overline{\psi(h_i)}.$$

Последнее равенство следует, из того, что функции ϕ, ψ постоянны на классах сопряженности. Из этой формулы очевидно, что $\langle \gamma_i, \gamma_j \rangle = \delta_{i,j}\frac{|C_i|}{|G|}$, т.е. γ_i образуют ортогональный базис в пространстве Ξ.

Следующая теорема утверждает, что характеры неприводимых представлений образуют другой ортонормированный базис в пространстве Ξ

Теорема 4. а) Число неприводимых представлений группы равно числу классов сопряженных элементов.
б)**(Соотношение ортогональности характеров)** $\langle \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \rangle = \delta_{i,j}$.

Алгоритм разложения на неприводимые. Пусть при разложении пространства V на неприводимые пространство V_1 встречается a_1 раз, пространство V_2 встречается a_2 раз и т.д. Тогда $\chi = \sum a_i \chi^{(i)}$ и кратности a_i могут быть найдены по формуле $a_i = \langle \chi, \chi^{(i)} \rangle$

Характеры неприводимых представлений удобно записывать в виде таблицы где в столбцах стоят представители классов сопряженности, а в строках характеры неприводимых. Эта таблица называется *таблицей характеров*. Например таблица характеров для группы S_3 имеет вид:

	e	$(1,2)^{3}$	$(1,2,3)^{2}$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

В столбцах верхним индексом написано количество элементов в соответствующем классе. По строкам, в первой строке стоит тривиальное представление, во второй знаковое, в третьей двумерное построенное в Предложении 1. Характер последнего легче всего найти вычитанием: характер перестановочного представления равен $\chi(e) = 3, \chi((1,2)) = 1, \chi((1,2,3)) = 0$, а из него мы вычитаем характер тривиального представления (пользуясь примером 2 выше).

Предложение 5. Характер регулярного представления группы G порядка n равен

$$\chi_{\text{reg}}(g) = \begin{cases} n, & \text{при } g = e \\ 0, & \text{при } g \neq e \end{cases}.$$

Предложение 6. Скалярное произведение $\langle \chi_{\text{reg}}, \chi^{(i)} \rangle = d_i$.
Следствие. $\chi_{\text{reg}} = d_1\chi^{(1)} + d_2\chi^{(2)} + \cdots + d_k\chi^{(k)}$.
Следствие $|G| = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_k^2$.
Пример. а) Для абелевой группы G все представления одномерные и их количество равно $|G|$. б) $|S_3| = 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$.

Определение 4. Пусть V, U векторные пространства. Тензорным произведением $V \otimes U$ векторных пространств называется пространство порожденное векторами $v \otimes u$ с соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda(v \otimes u) &= \lambda v \otimes u = v \otimes \lambda u \\ (v_1 + v_2) \otimes u &= v_1 \otimes u + v_2 \otimes u \\ v \otimes (u_1 + u_2) &= v \otimes u_1 + v \otimes u_2. \end{aligned}$$

Если выбрать базисы $V = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, $U = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, то базисом в тензорном произведении $V \otimes U$ будут вектора $e_i \otimes f_j$. В самом деле, если $v = \sum a^i e_i, u = \sum b^j f_j$, то

$$v \otimes u = \left(\sum a^i e_i\right) \otimes u = \sum a^i e_i \otimes u = \sum a^i b^j e_i \otimes f_j.$$

В частности мы видим, что $\dim(V \otimes U) = \dim V \cdot \dim U$.

Тензоры вида $v \otimes u$ называются разложимыми. Не любой тензор является разложимым, например $e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$ не разложим.

Определение 5. Пусть $A\colon V \to V$ и $B\colon V \to V$ два линейных оператора. Их тензорным произведением называется оператор $A \otimes B\colon U \otimes V \to U \otimes V$, определенный на разложимых тензорах по формуле $A \otimes B(v \otimes u) = Av \otimes Bu$.

Если операторы заданы матрицами $Ae_i = \sum a_i^{i'} e_{i'}$ и $Bf_j = \sum b_i^{j'} f_{j'}$, то матрица $A \otimes B$ равна $A \otimes B(e_i \otimes f_j) = \sum a_i^{i'} b_j^{j'} e_{i'} \otimes f_{j'}$.

Пример. Пусть $\dim V = \dim U = 2$, матрицы A, B диагональны: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $A \otimes B$ имеет вид:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\mu_2 \end{pmatrix}$$

Предложение 7. $\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}A \cdot \mathrm{Tr}B$

Определение 6. Пусть Пусть $\rho \colon G \to GL(V)$ и $\rho' \colon \ \to GL(U)$ два представления одной группы G. Их тензорным произведением $\rho \otimes \rho'$ называется представление группы G в пространстве $V \otimes U$ определенное по формуле $g \mapsto (\rho(g) \otimes \rho'(g))$.

Предложение 8. $\chi_{V \otimes U}(g) = \chi_V(g) \cdot \chi_U(g)$

Пример. Построим таблицу характеров группы S_4. Так как классов сопряженности 5, то всего неприводимых представлений 5. Мы уже знаем три представления: ρ_1 — тривиальное, ρ_2 — знаковое и ρ_3 —трехмерное в пространстве порожденном векторами $e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 - e_4$.

Из того что сумма квадратов размерностей равна 24 следует, что нужно построить еще трехмерное и двумерное представление, обозначим их ρ_4 и ρ_5.

Трехмерное можно построить геометрически — реализовав S_4 как группу вращений трехмерного пространства сохраняющих куб. Отметим, что другая геометрическая реализация S_4 — как группы движений сохраняющих тетраэдр дает представление ρ_3.

Другой способ построить ρ_4 — это просто взять тензорное произведение $\rho_4 = \rho_3 \otimes \rho_2$.

Характер ρ_5 можно найти воспользовавшись соотношениями ортогональности. Можно его реализовать явно, для этого надо рассмотреть гомоморфизм из S_4 в S_3 и взять двумерное представление S_3. Более точно группа S_4 действует на пространстве многочленов $\alpha_1(x_1x_2 + x_3x_4) + \alpha_2(x_1x_3 + x_2x_4) + \alpha_3(x_1x_4 + x_2x_3)$, таких что сумма коэффициентов $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ равно нулю.

Еще один способ найти недостающий характер — воспользоваться формулой $\chi_{\mathrm{reg}} = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} + 3\chi^{(3)} + 3\chi^{(4)} + 2\chi^{(5)}$

	e	$(1,2)$ 6	$(1,2,3)$ 8	$(1,2,3,4)$ 6	$(1,2)(3,4)$ 3
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1	-1	1
$\chi^{(3)}$	3	1	0	-1	-1
$\chi^{(4)}$	3	-1	0	1	-1
$\chi^{(5)}$	2	0	-1	0	2

Домашнее задание

Решения надо прислать или принести до начала лекции 31 марта. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

Упражнение 1. Докажите, что вектор $e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$ не является разложимым (т.е. не существует v, u таких, что $v \otimes u = e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$.

Задача 2. а) Докажите, что $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.
б) Докажите, что все характеры представлений группы S_n являются вещественными.

Указание: а) используйте знания про собственные значения g. б) докажите, сначала что в S_n каждый элемент сопряжен своему обратному

Задача 3. а) Найдите матрицу характеров неприводимых представлений группы D_5. Задайте все представления матрицами (т.е. напишите матрицы соответствующие каждому элементу группы, или хотя бы образующим).
б) Разложите все тензорные произведения (включая тензорные квадраты) на неприводимые.

Задача 4 (Второе соотношение ортогональности для характеров). Докажите, что для любых двух классов сопряженности C_i, C_j, где $1 \leqslant i, j \leqslant k$ верно:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \chi^{(\alpha)}(h_i)\overline{\chi^{(\alpha)}(h_j)} = \delta_{i,j}\frac{|G|}{|C_i|}$$

Материалы, а также полезная информация есть на сайте:
[qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html]

Лекция 7.

В начале приведем еще несколько свойств и конструкций относящихся к представлениям конечных групп

Теорема 1 (Без доказательства). Размерность неприводимого представления делит порядок группы $|G|$.

Определение 1. Пусть заданы H — подгруппа в G и представление $\rho\colon G \to GL(V)$. Тогда ρ задает представление группы H в пространстве V, оно называется *ограничением* представления ρ на подгруппу H.

Пример. Рассмотрим подгруппы $C_3 \subset S_3$. Таблица характеров S_3 приведена на рисунке слева.

При ограничении на C_3 представления χ_1 и χ_2 совпадут, а представление χ_3 окажется приводимым: $\mathrm{ch}_3 = \tilde{\chi_4} + \tilde{\chi_5}$. Соответствующая таблица характеров C_3 приведена на рисунке справа, $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

	e	$(1,2)$ ^{3}	$(1,2,3)$ ^{2}
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

	e	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
χ_1	1	1	1
χ_3	2	-1	-1
$\tilde{\chi_4}$	1	ϵ	ϵ^2
$\tilde{\chi_5}$	1	ϵ^2	ϵ

Определение 2. Пусть $\rho\colon G \to GL(V)$ и $\rho'\colon H \to GL(U)$ два представления. Их тензорным произведением $\rho \boxtimes \rho'$ называется представление группы $G \times H$ в пространстве $V \otimes U$ определенное по формуле $(g,h) \mapsto (\rho(g) \otimes \rho'(h))$.

Не надо путать с тензонрым произведением представлений $\otimes$ которое было на прошлой лекции — там мы по двум представлениям группы G строили опять представление группы G, а тут по представлениям двух разных групп G, H строим представление их произведения $G \times H$.

Пример. Пусть $G = H = S_2$. Представления $\rho = \rho'$ заданы матрицами $e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда представление $\rho \boxtimes \rho'$ задается матрицами:

$$(e,e) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ (e,\sigma) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ (\sigma,e) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{‘}(\sigma,\sigma) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 2. а) Если ρ и ρ' неприводимые представления групп G и H, то $\rho \boxtimes \rho'$ — неприводимое представление группы $G \times H$. б) Все неприводимые представления группы $G \times H$ получаются таким способом.

Идея доказательства. Из формулы $\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}(A) \cdot \mathrm{Tr}(B)$ следует, что $\chi_{\rho\boxtimes\rho'}(g,h) = \chi_\rho(g) \cdot \chi_{\rho'}(h)$. Из этого легко доказать, что характеры произведений неприводимых ортонормированы относительно скалярного произведения. Из этого следует, что им соответствуют различные неприводимые представления $G \times H$.

То, что так получаются все неприводимые представления следует из того, что количество неприводимых представлений равно количеству классов сопряженности, а количество классов сопряженности $G \times H$ равно произведению количества классов сопряженности G и количества классов сопряженности H. ■

Пример. У группы C_2 есть два представления и таблица характеров имеет вид:

	e	ρ
$\chi^{(1)}$	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1

Тогда у группы $C_2 \times C_2$ таблица характеров имеет вид:

	(e,e)	$((e,\rho)$	(ρ,e)	(ρ,ρ)
$\chi^{(1)} \boxtimes \chi^{(1)}$	1	1	1	1
$\chi^{(1)} \boxtimes \chi^{(2)}$	1	1	-1	-1
$\chi^{(2)} \boxtimes \chi^{(1)}$	1	-1	1	-1
$\chi^{(2)} \boxtimes \chi^{(1)}$	1	-1	-1	1

Для самоконтроля легко проверить, что $\chi_{\text{reg}} = \chi^{(1)} \boxtimes \chi^{(1)} + \chi^{(1)} \boxtimes \chi^{(2)} + \chi^{(2)} \boxtimes \chi^{(1)} + \chi^{(2)} \boxtimes \chi^{(2)}$.

Оставшуюся часть курса мы будем заниматься бесконечными группами. Мы будем рассматривать группы, множество элементов которых образует многообразие.

Определение 3. Множество $M \subset \mathbb{R}^N$ называется *подмногообразием* коразмерности l если для любой точки $x \in M$ существует открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^N$, $x \in U$ такое, что $M \cap U$ задается уравнениями $f^1(x^1, \ldots, x^N) = 0, \ldots, f^l(x^1, \ldots, x^N) = 0$, такими, что ранг матрицы $(\frac{\partial f}{\partial x_i})$ равен l.

Число $k = N - l$ называется *размерностью* многообразия. По теореме о неявной функции можно выбрать k координат из $x^1, \ldots, x^N$ так, что остальные являются функциями от выбранных. Эти выбранные k координат называются локальными координатами. Функция на M называется гладкой, если она гладкая в локальных координатах.

Существуют другие выборы локальный координат. Картой на M называется такое открытое подмножество M (пересечение открытого подмножества $\mathbb{R}^N$ и M) допускающие диффеоморфизм (биективное и гладкое в обе стороны отображение) ϕ с открытым подмножеством в $\mathbb{R}^k$. Если $y^1, y^2, \ldots, y^k$ координаты в $\mathbb{R}^n$, то функции $\phi(x^1), \ldots, \phi(x^k)$ называются *локальными координатами* на карте U.

Примеры.
1. Окружность $S^1 = \{(x,y)|x^2+y^2=1\} \subset \mathbb{R}^2$. Можно покрыть 4 картами — верхняя, правая, нижняя и левая половина. На верхней и нижней картах в качестве координат можно взять x, на левой и правой y.
2. Сфера $S^2 = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\} \subset \mathbb{R}^2$. По аналогии с прошлым примером можно ввести две карты. Более экономных способ — две карты, вся сфера без Южного полюса и вся сфера без Северного полюса. Отображения ϕ строятся при помощи стереографической проекции.

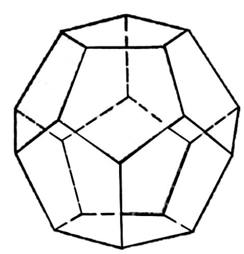
Домашнее задание

Решения надо прислать или принести до начала лекции 7 апреля. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

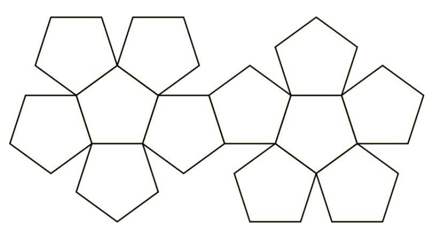
Задача 1. Найдите матрицу характеров неприводимых представлений группы A_4.
Указание: используйте ограничения представлений S_4.

Задача 2. Скольку существует неприводимых двумерных представлений у группы D_{5h}? Найдите их характеры.

Задача 3. а) Докажите, что порядок группы вращений додекаэдра G_0 равен 60.
б) Найдите порядки элементов этой группы, опишите эти вращения геометрически.
в) Докажите, что G изоморфна группе четных перестановок A_5.
Указание: разбейте вершины додекаэдра на 5 тетраэдров, так чтобы группа G_0 действовала на этом множестве из 5 элементов.
г) Докажите, что группа всех движений додекаэдра G изоморфна одной из групп S_5 или $C_2 \times A_5$.
д) Докажите, что группы S_5 и $C_2 \times A_5$ не изоморфны.



Додекаэдр



Развертка

Материалы, а также полезная информация есть на сайте:
[qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html]

Лекция 8. Касательное пространство, алгебры Ли.

Определение 1. Многообразием называется *связным*, если для любых двух точек $x, y \in M$ существует путь их соединяющий (формально, существует непрерывное отображение $g\colon [0,1] \to M$, такое что $g(0) = x, \quad g(1) = y$)

Петлей называется непрерывное отображение $g\colon [0.1] \to M$, такое что $g(0) = g(1) = x_0$. Связное многообразие называется *односвязным*, если для любая петля может быть непрерывно продеформировано в постоянное отображение $g(t) = x_0$, $\forall t \in [0,1]$. Слова «непрерывно продеформирована» можно формализовать как существование непрерывного отображение $H\colon [0,1] \times [0,1] \to M$ такое, что $H(s,0) = g(s)$, $H(0,t) = H(s,1) = H(1,t) = x_0$.

Примеры. **1**. Сфера S^2 односвязна.

2. Плоскость без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ являеся связной, но не односвязной.

Для любой кривой начинающейся в точке x_0, $g\colon [0,1] \to M$, $g(0) = x_0$ можно рассмотреть производную в точке 0: $g'(0)$. Совокупность всех таких векторов называется *касательным пространством* в точке x_0, обозначение $\mathrm{T}_{x_0}M$.

Примеры.

1. Сфера S^2 Для того чтобы малое приращение $(\delta x, \delta y, \delta x)$ к точке (x, y, z) лежало тоже на сфере необходимо чтобы $x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0$.

2. Если многообразие задано уравнение $f(x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0$, то касательное пространство задается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}\delta x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\delta x^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^N}\delta x^N = 0$$

Аналогично, для случая системы уравнений $f^1 = f^2 = \cdots = f^l = 0$ касательное пространстсво в точке описывается системой уравнений.

Определение 2. Множество $G \subset GL(n)$ являющееся подгруппой и имеющее структуру многообразия называется (матричной) *Группой Ли.*

Примеры.

1. Группа всех невырожденных матриц $Gl(n)$. Это открытое подмножество в множестве всех матриц $\mathbb{R}^{n^2}$ поэтому является многообразием.

2. Группа матриц с единичным определителем $SL(n)$. Задается одним уравнением $det(A) - 1 = 0$. Надо проверить, что дифференциал не равен нулю, проверим это в точке $A = E$. Прямым вычислением получаем, что

$$\sum \frac{\partial det}{\partial a_{ij}}\delta a_{ij} = \delta a_{11} + \cdots + \delta a_{nn} \neq 0.$$

Из этого вычисления видно, что касательным пространством в точке E является пространство матриц со следом равным 0.

3. Через $O(n)$ обозначается группа всех ортогональных матриц. Найдем касательное пространство к единице. Ортогональные матрицы задаются уравнения $XX^t = E$. Рассмотрим малое приращение $X = E + t\delta X + o(t)$. Тогда получаем $\delta X + \delta X^t = 0$, т.е. касательное пространство состоит из кососимметричных матриц.

Уравнение задающее $O(n)$ — $XX^t = E$ являет собой $n(n+1)/2$ уравнений на матричные элементы которых всего n^2. Чтобы доказать, что эта система уравнений задает подмногообразие надо убедится, что ранг матрицы из производных максимальный, т.е. равен $\frac{n(n+1)}{2}$. Это эквивалентно тому, что подпространства заданное этой матрицей имеет размерность $\frac{n(n-1)}{2}$. Легко видеть, что кососимметрические матрицы именно такую размерность и имеют. Это и есть размерность группы $O(n)$.

До сих пор мы изучали только касательное пространство в единице. На самом деле, этого достаточно, как видно из следующей конструкции. Пусть g произвольный элемент группы, $X(t)$ кривая проходящая через E: $X(t) = E + t\delta X + o(t)$. Рассмотрим кривую $Y(t) = X(t)g$. Тогда $Y(0) = g$ и касательный вектор к этой кривой в точке g равен δXg. Легко понять, что все касательное пространство к точке g получается из касательного пространства к E умножением справа на g. Из этого следует, что $SL(n)$ является группой Ли размерность $n^2 - 1$, $O(n)$ является группой размерности $\frac{n(n-1)}{2}$.

Последняя конструкцию имеет еще одно применение. По любому $A \in \mathrm{T}_E G$ можно построить векторное поле которое в точке g равно Ag (т.е. выбрать касательный вектор в каждой точке). Получаем дифференциальное уравнение $G(t)' = AG(t)$, его решением является экспонента $G(t) = \exp(tA)$. Т.е. получаем, что для любого $A \in \mathrm{T}_E G$ матрица $\exp(A) \in G$.

Теорема 1. а) Экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом (биективным и гладким отображением) некоторой окрестности нуля в $\mathrm{T}_E G$ на некоторую окрестность E в G.
б) Любая малая окрестность E связной группы G порождает G как группу.

Эта теорема в частности означает, что касательное пространство $\mathrm{T}_E G$ в большой степени определяет группу G. Но не любое подпространство в пространстве матриц может быть касательным пространством к группе.

Предложение 2. Пусть $A, B \in \mathrm{T}_E G$. Рассмотрим экспоненциальные кривые $g(t) = E + At + A^2t^2/2 + o(t^2)$, $h(s) = E + Bs + B^2s^2/2 + o(s^2)$. Тогда:

$$\Big(g(t)h(s)g(-t)h(-s)\Big) = E + o\cdot t + 0\cdot s + 0\cdot t^2 + o\cdot s^2 + (AB - BA)ts + \ldots. \quad (1)$$

Отсюда взяв параметры $t = s = \sqrt{\tau}$, следует, что коммутатор $[A, B] = AB -$

$BA \in \mathrm{T}_E G$.

Определение 3. Алгеброй Ли называется векторное пространство $\mathfrak{g}$ снабженное билинейное операцией $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ удовлетворяющей следующим двум аксиомам:

$$\begin{array}{rl} \text{Антикоммутативность} & [x,y] = -[y,x] \\ \text{Тождество Якоби} & [[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y] = 0 \end{array}$$

Примеры.
1. Касательное пространство к единице к любой группе Ли G. Обычно обозначается Lie$G$ или маленькой готической буквой $\mathfrak{g}$. Для матричных групп:

а) Алгебра Ли группы всех невырожденных матриц $GL(n)$ размера $n\times n$ обозначается $\mathfrak{gl}(n)$. Состоит из всех матриц размера $n\times n$

б) Алгебра Ли группы всех матриц с определителем 1 $SL(n)$ обозначается $\mathfrak{sl}(n)$. Состоит из всех матриц размера $n\times n$ с нулевым следом.

в) Алгебра Ли группы всех ортогональных матриц $O(n)$ обозначается $\mathfrak{so}(n)$. Состоит из всех кососимметричных матриц размера $n\times n$.

2. Вектора в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Коммутатор — векторное произведение.

Домашнее задание

Решения надо прислать или принести до начала лекции 14 апреля. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

Упражнение 1. Докажите тождество (3).

Упражнение 2. Докажите непосредственно, что $\mathfrak{so}(n)$ является алгеброй Ли. (т.е. коммутатор двух кососимметричных матриц является кососимметричной матрицей).

Задача 3. а) Найдите касательное пространство к E у группы унитарных матриц $U(n)$ (т.е. матриц заданных уравнением $XX^* = E$). б) Найдите размерность группы $U(n)$.

Задача 4. а) Докажите, что группа $SO(3)$ (ортогональные матрицы с определителем 1) является связной. б) Докажите, что группа всех ортогональных матриц $O(3)$ не связная.

Указание: а) воспользуйтесь тем, что любое элемент из $SO(3)$ является поворотом вокруг некоторой оси.

Пусть $I_1, I_2, \dots, I_l$ базис в алгебре Ли. Тогда коммутатор базисных элементов снова разлагается по базису $[I_i, I_j] = \sum_k c_{ij}^k I_k$. Числа c_{ij} называются *структурными константами*. По аналогии с тем, что конечная группа описывается таблицей умножения, алгебра Ли описывается своими структурными константами.

Задача 5. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(3)$ изоморфна алгебре векторов $\mathbb{R}^3$.
Указание: Выберите удачный базис в $\mathfrak{so}(3)$ *и проверьте совпадение структурных констант.*

Лекция 9. Алгебры Ли, представления.

Тождество Якоби введенное на прошлой лекции можно еще переписать в виде:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x.z]],$$

что означает, что оператор $[x,\cdot]$ является дифференцированием, т.е. удовлетворяет правилу Лейбница.

Приведем еще несколько примеров алгебр Ли.

3. Пространство функций от переменных q_i и p_i со скобкой Пуассона:

$$\{f,g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i}$$

4а. Одномерная алгебра Ли $\dim \mathfrak{g} = 1$. Можно считать, что порождается одним элементом x. Тогда, $[x,x] = -[x,x]$, значит $2[x,x] = 0$, $[x,x] = 0$.

Определение 4. Алгебра Ли называется коммутативной (абелевой) если для любых элементов $x, y \in \mathfrak{g}$ верно, что $[x,y] = 0$.

Предложение 3. Алгебра Ли коммутативной группы Ли будет тоже коммутативной.

Доказательство. В силу коммутативности группы, рассмотренное в прошлой лекции выражение $\Big(G(t)H(s)G(-t)H(-s)\Big) = \Big(G(t)G(-t)H(s)H(-s)\Big) = E$. ■

Ясно, что есть коммутативная алгебра любой размерности.

4б. Двумерные алгебры Ли $\dim \mathfrak{g} = 2$. Есть два случая — коммутативная алгебра. Вторая $\mathfrak{g} = \langle x, y \rangle$, и коммутатор имеет вид $[x,x] = 0$, $[y,y] = 0$, $[x,y] = x$.

4б. Есть трехмерная алгебра Ли которая «далека» от коммутативной у которой $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. А именно алгебра $\mathbb{R}^3$, в домашнем задании мы доказали, что она изоморфна алгебре, удобно взять базис $\mathfrak{so}(3)$.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Коммутаторы имеют вид $[J_1, J_2] = J_3$, $[J_2, J_3] = J_1$, $[J_3, J_1] = J_2$.

Посмотрим на алгебру Ли группы $SU(2)$ — группы унитарных матриц с определителем 1. Соответствующая алгебра $\mathfrak{su}(2)$ состоит из косоэрмитовых матриц со следом 0. В качестве базиса можно взять $I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I_2 =$

$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Коммутаторы имеют вид $[I_1, I_2] = 2I_3$, $[I_2, I_3] = 2I_1$, $[I_3, I_1] = 2I_2$. Заменим базис $I'_k = \frac{1}{2}I_k$, тогда в базисе I'_1, I'_2, I'_3 структурные константы имеют тот же вид, что и в базисе J, значит алгебры $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{so}(3)$ изоморфны.

Понятия действие группы на множестве остается. Взамен утверждения про количество элементов в стабилизаторе получается:

Предложение 4. Пусть действие группы G на X «хорошее» (достаточно условия, что отображение $G \times X \to X$ является гладким, и орбита Gx является подмногообразием). Тогда $\dim G = \dim G_x + \dim GX$.

Оставшуюся часть курса мы будем заниматься представления групп Ли.

Определение 5. Представлением группы Ли G называется гладкий гомоморфизм $\rho\colon G \to GL(V)$.

Дифференциал в единице отображения ρ определяется отображение алгебр Ли $d\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Предложение 5. Отображение $d\rho$ является гомоморфизмом алгебр Ли, т.е.

$$[d\rho(A), d\rho(B)] = d\rho([A, B]), \tag{2}$$

$A, B \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Докажем, гомоморфизм ρ переводит подгруппы вида $\exp(tA)$ в подгруппы такого же вида. Точнее докажем, что для любого $A \in \mathfrak{g}$ верно, что $\exp(td\rho(A)) = \rho(t\exp(A))$. Обозначим левую часть через $g_1(t)$, правую часть через $g_2(t)$. Тогда

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} g_1(t)\right|_{t=t_0} = d\rho(A) \cdot \exp(td\rho(A))|_{t=t_0} = d\rho(A) \cdot g_1(t_0)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} g_2(t)\right|_{t=t_0} = \left(\left.\frac{\partial}{\partial t} \rho((t-t_0)\exp(A))\right|_{t=t_0} \right) \rho(t_0 \exp(A)) = d\rho(A) \cdot g_2(t_0)$$

Здесь во втором равенстве мы воспользовались тем, что ρ гомоморфизм. Таким образом кривые $g_1(t)$ и $g_2(t)$ удовлетворяют одному и тому же линейному дифференциальному уравнениях с начальным данным $g_1(0) = g_2(0)$. Значит они равны.

Теперь рассмотрим два элемента $A, B \in \mathfrak{g}$. , обозначим соответствующие экспоненциальные кривые $g(t) = E + At + A^2t^2/2 + o(t^2)$, $h(s) = E + Bs + B^2s^2/2 + o(s^2)$. Тогда:

$$\rho\Big(g(t)h(s)g(-t)h(-s)\Big) = \rho\Big(g(t)\Big)\rho\Big(h(s)\Big)\rho\Big(g(-t)\Big)\rho\Big(h(-s)\Big). \tag{3}$$

Правую часть можно переписать как произведение членов вида $\exp(td\rho(A))$. Теперь вычисляя слева и справа член при ts получаем (2). ■

Определение 6. Представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(V)$.

Предыдущее предложение доказывает, что по представлению Группы Ли всегда строится представление алгебры Ли.

Рассмотрим самый простой пример — одномерную группу $U(1)$. Она состоит из элементов вида $e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Эквивалентно ее можно описать как $SO(2)$, изоморфизм имеет вид: $e^{i\varphi} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Топологически эта группа является окружностью — задана $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

Алгебра Ли состоит из мнимых чисел. Алгебра является коммутативной, и задается образом любого элемента, скажем i. Этот образ $\varphi(i)$ может быть любой матрицей $X = d\rho(i)$.

Если мы хотим, чтобы получилось представление группы, то по формуле доказанной выше $\rho(e^{i\varphi}) = \exp\Big(\varphi \cdot d\rho(i)\Big)$. Тогда надо, чтобы $\rho(e^{2\pi i}) = \exp(2\pi X)$ равнялось единичной матрицей, надо чтобы X дигонализовалась, с целыми собственными значениями $n_1, n_2, \ldots, n_k$

$$\rho(e^{i\varphi}) = \begin{pmatrix} e^{in_1\varphi} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{in_2\varphi} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{in_k\varphi} \end{pmatrix}.$$

Характер этого представления равен $\mathrm{Tr}(\rho(e^{i\varphi})) = e^{in_1\varphi} + \ldots + e^{in_k\varphi}$. Все неприводимые представления $U(1)$ одномерны.

Отметим, без пояснений, что тот факт что не любое представление алгебры Ли $\mathfrak{u}(1)$ является представление группы Ли связан с тем, что группа $U(1)$ не односвязна.

Домашнее задание

Решения надо прислать или принести до начала лекции 28 апреля. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

Задача 1. а) Докажите, что в алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ можно выбрать базис e, h, f со структурными константами $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$.
б) Докажите, что алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$ изоморфны.

Задача 2. Рассмотрим представление группы $U(1)$ на пространстве матриц с нулевым следом по формуле:

$$A \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Найдите характер этого представления. Разложите его на неприводимые.

Задача 3. а) Рассмотрим алгебру $\mathfrak{so}(n)$. Она имеет естественный базис $J_{ik} = E_{ik} - E_{ki}$, где E_{ik} это матрица у которых 1 стоит на месте (i,k), а в остальные местах стоит 0. Разложите коммутатор $[J_{ab}, J_{cd}]$ по этому базису.
б) Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{so}(4)$ изоморфна прямой сумме $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$.
Указание: выразите через J_{ab} другие образующие J_1, J_2, J_3 и J_1', J_2', J_3' так, что каждая тройка удовлетворяет соотношениям $\mathfrak{so}(3)$, а $[J, J'] = 0$.

Материалы курса смотрите на сайте:
[`qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html`]

Контрольная работа.

Задача 1. Группа S_2 действует на пространстве многочленов от двух переменных степени 4 перестановкой переменных x, y.
а) Задайте это представление матрицами. Найдите характер представления.
б) Разложите это представление на неприводимые.

Задача 2 (Группа кватернионов). Через Q_8 обозначим группу состоящую из 8 элементов $\pm 1, \pm i \pm j \pm k$ с умножением $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$.
а)Найдите порядки всех элементов группы Q_8.
б) Найдите классы сопряженности в группе Q_8.
в) Найдите коммутант группы Q_8. Найдите все ее одномерные представления.
г) Найдите таблицу характеров в группе Q_8
д) Задайте все неприводимые представления матрицами (укажите образы i, j, k в этих представлениях).
е) Изоморфна ли группа Q_8 группе D_4?

Лекция 10. Представления $\mathfrak{su}(2)$.

Как и раньше, обозначим через J_1, J_2, J_3 образующие в алгебре Ли $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$. Их коммутаторы равны $[J_a, J_b] = \varepsilon_{abc} J_c$. Введем другие операторы действующие в представлении:

$$J^2 = -J_1^2 - J_2^2 - J_3^2, \quad J_+ = J_1 + iJ_2, \;\; J_- = J_1 - iJ_2$$

Предложение 1. Операторы $J^2, J_+.J_-$ удовлетворяют соотношениями:

$$[iJ_3, J_+] = J_+, \quad [iJ_3, J_-] = -J_-, \quad [J_+, J_-] = -2iJ_3,$$
$$[J_i, J^2] = 0,\; i = 1, 2, 3;$$

Так как операторы J^2 и iJ_3 коммутируют, то их можно одновременно диагонализовать. Обозначим через $v_{\lambda,m}$ базис из их собственных векторов:

$$J^2 v_{\lambda,m} = \lambda v_{\lambda,m}, \qquad iJ_3 v_{\lambda,m} = m v_{\lambda,m}.$$

Предложение 2. $J_+ v_{\lambda,m}$ является собственным для операторов J, J_3 с собственными значениями λ и $m+1$ соответственно, т.е. $J_+ v_{\lambda,m}$ пропорционален $v_{\lambda,m+1}$. Аналогично $J_- v_{\lambda,m}$ пропорционален $v_{\lambda,m-1}$.

Доказательство. Используя выведенные выше соотношения имеем:

$$J^2(J_+ v_{\lambda,m}) = J_+(J^2 v_{\lambda,m}) = \lambda J_+ v_{\lambda,m}$$
$$iJ_3(J_+ v_{\lambda,m}) = J_+(iJ_3 v_{\lambda,m}) + [iJ_3, J_+] v_{\lambda,m} = (m+1) J_+ v_{\lambda,m}$$

Вычисления с J_- полностью аналогичны. ■

Так как мы изучаем конечномерные представления то есть вектора $v_{\lambda,m}$ с максимальным и минимальным m. Обозначим их через $v_{\lambda,m_{max}}$ и $v_{\lambda,m_{min}}$. Тогда

$$\lambda v_{\lambda,m_{max}} = J^2 v_{\lambda,m_{max}} = (-J_3^2 - J_1^2 - J_2^2) v_{\lambda,m_{max}} = \left(-J_3^2 - \frac{J_+J_- + J_-J_+}{2}\right) v_{\lambda,m_{max}} =$$
$$= \left(-J_3^2 - \frac{2J_-J_+ + [J_+, J_-]}{2}\right) v_{\lambda,m_{max}} = \left(-J_3^2 + iJ_3 - \frac{2J_-J_+}{2}\right) v_{\lambda,m_{max}} =$$
$$= (m_{max}^2 + m_{max}) v_{\lambda,m_{max}}$$

Аналогично $\lambda v_{\lambda,m_{min}} = J^2 v_{\lambda,m_{min}} = (m_{min}^2 - m_{min}) v_{\lambda,m_{max}}$. Обозначим теперь $j = m_{max}$, тогда $\lambda = j^2 + j$, и на m_{min} мы получаем квадратное уравнение с корням $j+1$ и $-j$. Первый корень не подходит, так как m_{min} должно быть меньше чем m_{max}. Значит $m_{min} = -j$. Но разность между m_{max} и m_{min} должна быть целой, так как один вектор получается из другого операторами J_-. Значит число $2j$ — целое.

Будем обозначать через π_j представление $\mathfrak{su}(2)$ в котором $j = m_{max}$. Его размерность равна числу чисел m таких, что $(m-j)$ — целое и $-j \leqslant m \leqslant j$, откуда $\dim \pi_j = 2j+1$.

В базисе $v_{\lambda,j}, v_{\lambda,j-1}, \ldots, v_{\lambda,-j}$ матрица оператора iJ_3 имеют диагональный вид. У оператора J_+ все ненулевые элементы стоят над диагональю, у оператора J_- все ненулевые элементы стоят под диагональю.

$$iJ_3 \mapsto \begin{pmatrix} j & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & j-1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j-2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -j+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -j \end{pmatrix},$$

$$J_+ \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a_{j-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{j-2} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_j \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ J_- \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_j & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_{j-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{-j} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричные элементы a_m, b_m зависят от нормировки собственных векторов $v_{\lambda,m}$. Обычно изучают унитарные представления групп Ли, в которых элементам группы соответствуют операторы из унитарной группы $U(N)$, а элементам алгебры Ли соответствуют элементы из алгебры ли $\mathfrak{u}(N)$. Тогда разные собственные вектора являются ортогональными и можно сделать вектора $v_{\lambda,m}$ ортонормированным базисом.

Тогда оператор $J_i^* = -J_i$, откуда $J_+^* = -J_-$, т.е. $\overline{a_m} = -b_{m+1}$. Можно найти точное значение a_m, см. задачу ниже.

Перейдем теперь от представления алгебры Ли к представлению группы. По образам элементов из алгебры Ли легко восстанавливается образ экспоненциальных операторов. А именно

$$e^{tJ_3} \mapsto \begin{pmatrix} e^{-itj} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & e^{-it(j-1)} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it(j-2)} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & e^{it(j-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & e^{itj} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

С другой стороны $e^{tJ_3} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(t) & \sin(t)\\ 0 & -\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}$, откуда $e^{2\pi J_3} = E$. С другой стороны, по формуле (4) получаем, что в представлении π_j элементу $e^{2\pi J_3}$ соответствует единичный только если если j — целое. А для полуцелых j получается, что единичному элементу соответствует неединичный элемент, что невозможно.

Для группы $SU(2)$ ситуация другая, элементы J_3 соответствует матрица $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$. Тогда $e^{tJ_3} = \begin{pmatrix}e^{\frac{1}{2}it} & 0\\ 0 & e^{-\frac{1}{2}it}\end{pmatrix}$. Получается, что $e^{4\pi J_3} = E$, но по формуле (4) следует, что в представлении π_j элементу $e^{4\pi J_3}$ всегда соответствует единичная матрица, так что противоречия не получается.

Предложение 3. а) Для целых j представление π_j интегрируется до представления группы $SO(3)$. При полуцелых j однозначного представления группы $SO(3)$ не существует.
б) Для любого j представление π_j интегрируется до представления группы $SU(2)$.

Как и для конечных групп для любого представления ρ можно определить характер $\chi(g) = \mathrm{Tr}\rho(g)$.

Предложение 4. Характеры неприводимых представлений группы $U(1)$ равны $\chi_m(e^{i\varphi}) = e^{im\varphi}$. Соотношения ортогональности для характеров

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_m(e^{i\varphi})\overline{\chi_n(e^{i\varphi})}d\varphi = \delta_{n,m}$$

В группе $SU(2)$ любая матрица сопряжена матрице $\begin{pmatrix}e^{i\varphi} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix}$. Поэтому характер достаточно вычислять на таких диагональных матрицах: $\chi(\varphi) = \mathrm{Tr}\rho\left(\begin{pmatrix}e^{i\varphi} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix}\right)$.

Предложение 5. Характеры неприводимых представлений π_j группы $SU(2)$ равны

$$\chi_j(\varphi) = e^{2j\varphi} + e^{2(j-1)\varphi} + \ldots + e^{-2j\varphi} = \frac{\sin((2j+1)\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Соотношения ортогональности:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_j(\varphi)\overline{\chi_l(\varphi)}(1-\cos 2\varphi)d\varphi = \delta_{j,l}.$$

Тензорное произведение представлений группы Ли определяется как и для конечных групп $(\rho_1\otimes\rho_2)(g) = \rho_1(g)\otimes\rho_2(g)$. Чтобы найти формулу для алгебр Ли можно получить дифференцированием. А именно, возьмем кривую $g(t) \in G$ такую, что $g(0) = E$, $g'(0) = A \in \mathfrak{g}$. Тогда дифференцируя по правилу Лейбница получаем, что

$$d(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = d\rho_1(g) \otimes 1 + 1 \otimes d\rho_2(g).$$

Предложение 6 (Клебш, Гордон). Тензорное произведение представлений π_j и $\pi_{j'}$ разлагается в прямую сумму неприводимых:

$$\pi_j \otimes \pi_{j'} = \bigoplus_{\substack{|j-j'|\leqslant l\leqslant(j+j') \\ (j+j')-l\in\mathbb{Z}}} \pi_l.$$

В частности $(\pi_0 \otimes \pi_j) = \pi_j$, $(\pi_{1/2} \otimes \pi_j) = \pi_{j+1/2} + \pi_{j-1/2}$ (при $j > 0$), $(\pi_1 \otimes \pi_j) = \pi_{j+1} + \pi_j + \pi_{j-1}$ (при $j > 1/2$).

Доказательство. Удобнее всего производить вычисления с характерами. Например:

$$\chi_{1/2}(\varphi) \cdot \chi_j(\varphi) = e^{2j+1\varphi} + 2e^{2j-1\varphi} + \ldots + 2e^{(-2j+1)\varphi} + e^{(-2j-1)\varphi} = \chi_{j+1/2}(\varphi) + \chi_{j-1/2}(\varphi)$$

Аналогично доказывается и общая формула $\chi_j(\varphi) \cdot \chi_{j'}(\varphi) = \chi_{|j-j'|}(\varphi) + \chi_{|j-j'|+1}(\varphi) + \ldots + \chi_{|j+j'|}(\varphi)$. ■

Домашнее задание

Решения желательно прислать до 12 мая. Помимо письменной сдачи надо быть готовым ответить на вопросы по решениям.

Задача 1. а) Докажите, что $J_+ J_- = -J^2 - J_3^2 - iJ_3$.
б) Найдите значение a_m (уравнения фиксируют только $|a_m|$, можно еще домножить вектора ортонормированного базиса на фазу чтобы a_m^2 стало вещественным).

Задача 2. а) Разложите тензорное произведение $\pi_{1/2} \otimes \pi_{1/2} \otimes \pi_{1/2}$ на неприводимые.
б) Найдите кратность вхождения тривиального представления в $\pi_{1/2} \otimes \pi_{1/2} \otimes \pi_{1/2} \otimes \pi_{1/2} \otimes \pi_{1/2}$.

Задача 3. а) Задайте матрицами операторы J_3, J_+, J_- в представлениях $\pi_{1/2}$ и $\pi_{1/2} \otimes \pi_{1/2}$ (в базисе состоящем из разложимых тензоров).
б) Из разложения Клебша–Гордона следует, что $\pi_{1/2} \otimes \pi_{1/2}$ разлагается в прямую сумму одномерного и трехмерного представлений. Укажите соответствующие инвариантные подпространства в базисе состоящем из разложимых тензоров.

Материалы курса смотрите на сайте:
[qft.itp.ac.ru/mbersht/Group.html]

Mikhail Bershtein, Curriculum Vitae
December 2014

General Information

Full name: Bershtein Mikhail Aleksandrovich
Date of birth: April 13, 1985.
Citizenship: Russia
e-mail: mbersht@mccme.ru, mbersht@itp.ac.ru.

Education

2007–2010	Graduate student, *Landau Institute for theoretical physics*; *Independent University of Moscow*. Ph.D. received June 2011. Thesis: Cohomology ring and correlation numbers in 2D Liouville gravity. Advisor: B.L. Feigin.
2002–2007	*Independent University of Moscow*. Advisor: B.L. Feigin.
2002–2007	*Lomonosov Moscow State University*. Graduated with honours. Advisor: E.B. Vinberg
2001–2002	*Karazin Kharkov National University*
1994–2001	*Kharkov Physics and Mathematics Lyceum No 27*

Employment

2011–	Junior researcher, *Landau Institute for theoretical physics.*
2012–	Researcher, *Institute for Information Transmission Problems.*
2014–	Researcher *International Laboratory of Representation Theory and Mathematical Physics, Higher School of Economics, Russian Federation.*

Research interests

Representation theory, Conformal field theory, Combinatorics, Algebraic geometry.

Publications

2014	M. Bershtein, A. Shchechkin, *Bilinear equations on Painleve tau functions from CFT*, [`arXiv:1406.3008.`]
2014	M. Bershtein, O. Foda, *AGT, Burge pairs and minimal models*, JHEP **1406:177**, (2014), [`arXiv:1404.7075.`]
2013	M. Bershtein, B. Feigin, A. Litvinov, *Coupling of two conformal field theories and Nakajima-Yoshioka blow-up equations*, [`arXiv:1310.7281.`]

2012	A. Belavin, M. Bershtein, G. Tarnopolsky *Bases in coset conformal field theory from AGT correspondence and Macdonald polynomials at the roots of unity*, JHEP **1304:019**, (2013), [`arXiv:1211.2788`]
2011	A. Belavin, M. Bershtein, B. Feigin, A. Litvinov, G. Tarnopolsky *Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory.* Comm. Math. Phys. **319 1**, 269–301 (2013), [`arXiv:1111.2803`].
2011	A. Belavin, V. Belavin, M. Bershtein, *Instantons and 2d Superconformal field theory*, JHEP **1109:117**, (2011), [`arXiv:1106.4001`]
2010	M. Bershtein, V. Fateev, A. Litvinov, *Selberg integrals and three-point correlation function in parafermionic Liouville field theory*, Nuclear Physics **B 84** 413–459, (2011). [`arXiv:1011.4090.`]
2010	A. Belavin, M. Bershtein, G. Tarnopolsky, *A remark on the three approaches to 2D Quantum gravity*, JETP Lett. **93 (2)**, 47-51 (2011) [`arXiv:1010.2222`]
2009	O. Alekseev M. Bershtein, *The ring of physical states in the M(2, 3) minimal Liouville gravity*, Theor. Math. Phys., **164(1)**, 929-946 (2010), [`arXiv:0906.1377`]
2006	M. Bershtein, V. Dotsenko, A. Khoroshkin, *Quadratic algebras related to the bihamiltonian operad*, Int Math Res Notices (2007) [`arXiv:math/0607289`]

Awards/Grants

2012-2013	RFBR grant *Instanton moduli spaces and representation theory* 12-01-31236-mol_a.
2009	Alexander Kuznetsov/Independent University of Moscow graduate student scholarship.
2007	Dobrushin scholarship.
2001/2002	Ukrainian president grant
2001	Gold medal at the International Mathematical Olympiad, Washington, D.C.
1997–2001	Grant of the Kharkov Fund for Young Talents' Support.

Conferences/schools/visits

2014 Oct.	Program *Gauge Theory, Integrability, and Novel Symmetries of Quantum Field Theory* Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook, NY, USA.

2014 Sep.	Visit of the SISSA (International School for Advanced Studies), Trieste, Italy.
2014 July	Program *RIMS Project 2014 Geometric Representation Theory*, Kyoto, Japan.
2014 June-July	WE-Heraeus Seminar *Integrable Lattice Models and Quantum Field Theories*, Bad Honnef, Germany.
2014 June	Workshop *Instanton Counting: Moduli Spaces, Representation Theory and Integrable Systems*, Leiden, Netherlands.
2014 Jan.	IV Winter School *Lie algebras, algebraic groups and invariant theory*, MSU, Moscow, Russia.
2013 Oct.	Visit of the New High Energy Theory Center, Rutgers University, New Brunswick, USA
2013 Oct.	Program *Quiver varieties* Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook, NY, USA.
2013 Sep.	Workshop *Geometric Correspondences of Gauge Theories* ICTP Trieste, Italy .
2013 Aug.	Visit of the SISSA (International School for Advanced Studies), Trieste, Italy.
2012 Oct.-Nov.	Program *Integrability in Modern Theoretical and Mathematical Physics* Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook, NY, USA.
2012 March	Workshop *on the AGT Conjecture*, Bethe Forum, Bonn, Germany.
2012 Jan.	Workshop *Classical and Quantum Integrable Systems*, JINR, Dubna, Russia.
2011 Sep.	Conference *Low dimensional physics and gauge principles*, Nor Amberd, Armenia and Tbilisi, Georgia.
2011 Jan.	II Winter School *Lie algebras, algebraic groups and invariant theory*, MSU, Moscow, Russia.
2010 Jan.	Conference *Representation Theory and Quantization,* FIM, ETH Zurich, Switzerland.
2009 Aug.	Summer School *Structures in Lie Representation Theory,* Jacobs University, Bremen, Germany.
2009 June—July	Conference *Conformal Field Theory, Integrable Models and Liouville Gravity,* Landau Institute, Chernogolovka, Russia.
2009 April	Conference *Second International Conference on String Field Theory and Related Aspects,* Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia.

2009 Jan.	Russian–Japanese School of Young Mathematicians, Kyoto University, Japan.
2007 June—July	Summer School *NATO Advanced Study Institute on Higher-Dimensional Geometry over Finite Fields,* Mathematisches Institut, Gottingen, Germany.
2007, Jan.—Feb.	Exchange program between IUM (Independent University of Moscow) and ENS Paris.
2002, 2003	Summer school *Contemporary mathematics*, Dubna Russia.

Teaching and organizing experience

2013–	*Moscow Institute of Physics and Technology.* Lecturer “Introduction to the group theory”
2007–	*Independent University of Moscow.* Lecturer “Instanon moduli spaces” (2011). Assistant teacher “Topology” (2007,2011), “Algebra” (2008-2009), “Introduction to the AGT correspondence” (2010, 2011). Tutor in Math in Moscow programm (2007-2010).
2002–2013	*Summer Mathematical school for gifted school students*, Kirov Russia, teacher.
2008–2013	*Moscow school 1543*, teacher for gifted school students.
2004, 2005, 2008, 2009	*Moscow Mathematical olympiad*, Head of one grade jury.
2003–2012	*Kharkov Mathematical olympiad*, member of jury.