

Лекции и семинары по курсу “Современная
электродинамика”

План лекций разработан А.И. Маймистовым.

Планы семинарских занятий, на которых разбираются
задачи, разработаны группой под руководством
Ю. Аникина,
в которую входят также
С. Белан, С. Вергелес, В. Парфеньев.

ПРОГРАММА КУРСА: СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Темы семинаров по курсу “Электродинамика конденсированных сред”

1.1 Уравнения Максвелла в среде; плоские волны

Уравнения Максвелла в среде. Диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость. Принцип причинности; соотношения Крамерса-Кронига. Две простейшие модели электромагнитного отклика сред: идеальная плазма и среда с фоновым резонансом. Плоские монохроматические волны. Волновые пакеты – фазовая и групповая скорость, дисперсия. Граничные условия для уравнений Максвелла.

1.2 Термодинамика и кинетика переменного электромагнитного поля в среде с линейным откликом

Поток энергии в электромагнитной волне; вектор Умова-Пойнтинга. Плотность энергии переменного электромагнитного поля; формула Бриллюэна. Тепловые потери при распространении электромагнитной волны.

1.3 Анизотропные среды. Магнитооптика

Установление симметрии тензора диэлектрической и магнитной восприимчивости. Обобщение выражений для плотности энергии и мощности тепловых потерь для анизотропной среды. Феноменологическое рассмотрение магнитооптических эффектов. Эффект Фарадея. Нахождение тензора диэлектрической восприимчивости для идеальной плазмы с постоянным наложенным магнитным полем. Циклотронный резонанс.

1.4 Скин-эффект

Скин-эффект: запись граничных условий в форме Леонтовича; условие применимости описания отражения волны от поверхности в терминах скин-эффекта. Нормальный скин-эффект. Связь поверхностного импеданса с тепловым излучением; скорость излучения нагретой поверхности в пустоту (через ФДТ).

1.5 Поверхностные электромагнитные волны

Поверхностные электромагнитные волны. Поверхностные плазмоны: условия существования, фазовая и групповая скорости. Структура поля и плотности потока энергии. Дисперсия поверхностных плазмонов для модели Друде.

1.6 Волноводы

Распространение волн в полых волноводах с идеально проводящими стенками. Волноводы с односвязными полостями. Дисперсия мод, частота отсечки. Определение длины распространения мод в полых металлических волноводах с учётом потерь на стенках. Распространение связанной моды вдоль металлической проволоки. Связанные моды в плоских волноводах. Коаксиальный волновод.

1.7 Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах.

Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах. Двумерный и трёх-мерный случаи. Оптическая теорема. Сечения рассеяния, поглощения и взаимодействия. Предел идеального металла, предел малых длин волн. Предел рассеяния на тонком стержне и на малом шаре

субволнового диаметра; оценки по порядку величины для амплитуд рассеяния и поглощения. Прохождение света через коллоидные растворы металлических нано-частиц. Одномерное рассеяние.

1.8 Трансформационная оптика

Численное решение уравнений Максвелла. Частный случай систем, излучающих электромагнитные волны. Perfectly Matched Layers (PMLs) граничные условия. Запись уравнений Максвелла в криволинейных координатах. Принцип Ферма. Метаматериалы. Частный случай ортогональных координат. Трансформационная оптика: принципиальная возможность создания “невидимок”.

1.9 Квази-стационарные поля

Квазистационарные поля. Сведение уравнений Максвелла в квазистационарном пределе к виду уравнения диффузии. Магнитная гидродинамика: вывод уравнения, эффект магнитного динамо. Учёт эффектов запаздывания в электрических цепях: получение поправок к сопротивлению цепи.

1.10 Магнитостатика магнетиков.

Магнитное поле ферромагнетика. Магнитная энергия ферромагнетиков, различные формы её записи. Энергия одноосного магнетика: энергии анизотропии и неоднородности.

1.11 Доменная структура магнетиков. Динамика магнитного момента.

Доменная структура в одноосном кристалле, ширина и энергия доменной стенки. Динамика магнитного момента в магнетиках. Спиновый магнитный резонанс.

1.12 Нелинейная оптика

Нелинейная восприимчивость. Генерация 2-й гармоники.

§1.1. Уравнения Максвелла в среде; плоские волны.

Уравнения Максвелла в среде. Диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость. Уравнения Максвелла в вакууме. Разделение полного тока на поляризационный ток (ток связанных зарядов), циркулирующий ток (ток, связанной с намагниченностью среды) и ток свободных зарядов. Получение уравнений Максвелла в среде из уравнений Максвелла в пустоте. Диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость: понятие о временной и пространственной дисперсии.

В ходе решения физических задач часто бывает полезным иметь возможность проводить описание отклика среды на электромагнитное поле, переходя от уравнений Максвелла в среде к уравнениям Максвелла в пустоте и обратно. Этот переход может прояснить физическую суть явления.

Принцип причинности; соотношения Крамерса-Кронига. Связь между электрической индукцией и электрическом полем в частотном представлении в случае нетривиальной временной дисперсии и отсутствии пространственной дисперсии. Аналитические свойства функции отклика в частотном представлении; физический смысл полюсов функции отклика. Соотношение Крамерса-Кронига. Литература: [1, §82].

• **Задача 1:** Вычислить диэлектрическую проницаемость в частотном представлении $\varepsilon(\omega)$, если известно, что коэффициент поляризуемости (диэлектрическая восприимчивость) во временном представлении имеет зависимость $\chi(t) = A \exp(-t/\tau)$.

Две простейшие модели электромагнитного отклика сред: плазма с затуханием и среда с фоновым резонансом. Модель Друде для электронной плазмы в τ -приближении: запись кинетического уравнения в τ -приближении, выражение проводимости σ при конечной частоте ω через проводимость σ_0 при нулевой частоте. Плазменная частота, предел низких частот $\omega\tau \ll 1$; связь диэлектрической проницаемости с проводимостью. Модель диэлектрика как среды, состоящей из лорентцевых осцилляторов.

• **Задача 2:** Найти диэлектрическую проницае-

мость $\varepsilon(\omega)$ для среды, состоящей из лорентцевых осцилляторов.

Плоские монохроматические волны. Уравнение Гельмгольца (волновое уравнение) для свободного электромагнитного поля в среде. Разложение электромагнитного поля по временным и пространственным гармоникам. Связь закона дисперсии с дисперсией диэлектрической восприимчивости и магнитной проницаемости. Показатели преломления и поглощения. Прозрачные среды.

Волновые пакеты – фазовая и групповая скорость, дисперсия. Понятие о волновом пакете, спектральная ширина волнового пакета. Плоской волновой пакет. Фазовая скорость. Групповая скорость. Огибающая волнового пакета. Вторая дисперсия. Сопровождающая система координат. Уравнение Шредингера на волновой пакет в сопровождающей системе координат.

Литература: §3.1.

• **Задача 3:** Пусть в начальный момент времени огибающая плоского волнового пакета в сопровождающей системе координат имела гауссову зависимость: $\Psi(t) = A \exp(-t^2/2\tau^2)$, где τ – длительность импульса. Найти дальнейшую эволюцию огибающей, если известна вторая дисперсия β_2 .

• **Задача 4:** Получить закон дисперсии для волн, распространяющихся в плазме, отклик которой даётся моделью Друде.

Граничные условия для уравнений Максвелла в среде. Вывод, физическая интерпретация граничных условий для уравнений Максвелла в среде. Поверхностные заряды. Поверхностные токи. Методы измерения электрического поля \mathbf{E} , электрической индукции \mathbf{D} , магнитной индукции \mathbf{B} и магнитного поля \mathbf{H} .

Задача. Оценить по порядку величины распределение поля вокруг удлинённого и сплюснутого эллипсоидов вращения, сделанных из оптически плотного диэлектрика и помещённых во внешнее постоянное электрическое поле.

§1.2. Термодинамика и кинетика переменного электромагнитного поля в среде с линейным откликом.

Поток энергии в электромагнитной волне; вектор Умова-Пойнтинга. Условие непрерывности потока энергии на границе раздела; связь этого условия с граничными условиями для уравнений Максвел-

ла в среде. Выражение для потока энергии через комплексные амплитуды полей.

Плотность энергии переменного электромаг-

нитного поля; формула Бриллюэна. *Запись выражения для плотности электромагнитной энергии через комплексные амплитуды. Условие применимости формулы Бриллюэна – малые потери.*

• **Задача 1:** Показать, что в прозрачной диспергирующей среде для плоской монохроматической волны выполняется соотношение

$$u\bar{W} = \bar{S}, \quad (1.1)$$

где u – групповая скорость, \bar{W} – средняя по времени плотность запасённой электромагнитной энергии, \bar{S} – среднее по времени абсолютное значение вектора Умова-Поинтинга.

Тепловые потери при распространении элек-

тромагнитной волны. *Запись выражения для объёмной плотности тепловых потерь через комплексные амплитуды полей. Выражение для полного количества выделившегося тепла для импульса конечной длительности.*

• **Задача 2:** Показать, что в почти прозрачной диспергирующей среде для плоской монохроматической волны выполняется соотношение

$$\frac{\bar{S}}{\bar{Q}} = \frac{\lambda}{4\pi k}, \quad (1.2)$$

где $k = \text{Im} \sqrt{\varepsilon\mu}$ – показатель поглощения среды, λ – длина волны в вакууме, а \bar{Q} – средняя по времени объёмная плотность потерь волны, уходящих в тепло.

§1.3. Анизотропные среды. Магнитооптика.

Установление симметрии тензора диэлектрической и магнитной восприимчивости. *Вывод формулы Кубо – квантово-механического выражения для коэффициента линейной восприимчивости. Установление симметрии коэффициентов обобщённой восприимчивости как следствия инвариантности уравнений движения системы по отношению к операции обращения времени. Литература: §4.1.*

• **Задача 1:** Установить симметрию диэлектрической проницаемости в случае, если среда прозрачна и её внутренняя симметрия характеризуется выделенным направлением. Также обсудить ситуацию, когда исходно изотропное тело помещено в однородное электрическое поле (эффект Керра).

Обобщение выражений для плотности энергии и мощности тепловых потерь для анизотропной среды. *Запись выражений для плотности энергии и мощности тепловых потерь для электромагнитной волны в анизотропной среде: физический смысл эрмитовой и анти-эрмитовой частей тензоров диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости.*

Феноменологическое рассмотрение магнитооптических эффектов. Эффект Фарадея. Нахож-

дение тензора диэлектрической восприимчивости для идеальной плазмы с постоянным наложенным магнитным полем. Циклотронный резонанс.

• **Задача 2:** Установить симметрию диэлектрической проницаемости в случае, если среда прозрачна и её внутренняя симметрия характеризуется выделенным направлением, обусловленным наложенным постоянным магнитным полем (в отсутствие магнитного поля среда изотропна). *Литература: §3.2.*

• **Задача 3:** Показать, что при распространении линейно поляризованной волны в изотропной среде вдоль наложенного на неё магнитного поля плоскость её поляризации испытывает равномерное вращение по мере распространения (эффект Фарадея).

• **Задача 4:** Найти явный вид диэлектрической проницаемости для идеальной классической плазмы, находящейся в однородном магнитном поле, рассмотрев распространение линейных волн вдоль магнитного поля и поперёк него линейной поляризацией вдоль магнитного поля.

• **Задача 5:** Показать, что при распространении радиоволн в ионосфере следует ожидать резонансных явлений близи длины волны $\lambda \approx 210$ м. Принять напряжённость магнитного поля земли $H = 0.5$ э.

§1.4. Скин-эффект.

Граничные условия в форме Леонтовича позволяют решать задачу об отражении электромагнитных волн от поверхности тела, избегая рассмотрения того, что происходит внутри самого тела. Отражательные свойства поверхности характеризуются только поверхностным импедансом. Практическое применение этого подхода весьма обширно и включает в себя радиолокацию, распространения переменного тока по проводам, и другие области электротехники.

Скин-эффект: запись граничных условий в форме Леонтовича; условие применимости описания отражения волны от поверхности в терминах скин-эффекта. Связь тангенциальных компонент электрического и магнитных полей на границе оптически плотного материала. Глубина скин-слоя. Условие применимости локальной связи между полями: малая величина глубины проникновения в материал (длины волны в материале) по сравнению с длиной волны в окружающем пространстве и радиусом кривизны поверхности. Принцип причинности для поверхностного импеданса; принцип причинности для обратного поверхностного импеданса. Физический смысл поверхностного импеданса: связь между электрическим полем и поверхностным током.

Литература: [1, §87], §3.3.

Нормальный скин-эффект.

• **Задача 1:** Выразить поверхностной импеданс через диэлектрическую проницаемость ϵ и магнитную восприимчивость μ отражающего материала в случае нормального скин-эффекта. Связать между собой глубину скин-слоя δ , частоту волны ω и поверхностный импеданс ζ .

• **Задача 2:** Вычислить закона дисперсии поверхностного импеданса для почти идеального металла, дисперсия проводимости которого соответствует модели Друде.

• **Задача 3:** Определить площадь полезного се-

чения для прутков диаметром 10см, сделанных из меди и из стали, по которым течёт переменный ток с частотой 50Гц. Принять, что сопротивление меди равно $\sigma_{Cu} = 580$ ксим/см, магнитная восприимчивость $\mu_{Cu} = 1$, сопротивление стали $\sigma_{Fe} = 100$ ксим/см, магнитная восприимчивость стали $\mu_{Fe} = 1000$. *Указание:* найти поверхностный импеданс для обоих материалов, и через него определить глубину скин-слоя на данной частоте. Определить поверхностные импедансы для обоих материалов. *Пояснение:* для указанных параметров глубина скин-слоя в меди $\delta_{Cu} = 9.4$ мм, в стали $\delta_{Fe} = 0.74$ мм.

Обсуждение области существования в частотном представлении нормального скин-эффекта для металла через рассмотрение кинетического уравнения Больцмана: длина свободного пробега должна быть меньше чем масштаб, на котором изменяется электрическое поле, т.е. глубина проникновения. Литература: [2, §7.2].

Связь поверхностного импеданса с тепловым излучением; скорость излучения нагретой поверхности в пустоту (через флуктуационно-диссипационную теорему).

• **Задача 4:** Рассмотрим гранулу сферической формы радиуса a , находящуюся в вакууме и имеющую температуру T . Радиус гранулы мал по сравнению с глубиной скин-слоя δ на частоте $\omega_T = T/\hbar$, соответствующей температуре, $a \ll \delta$, при этом задана дисперсия диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega)$ материала частицы, а его магнитная восприимчивость равна единице (предполагается, что радиус гранулы всё же достаточно велик для того, чтобы возможно было пользоваться приближением локальной связи между электрическим полем и плотностью тока). Найти в общем виде интенсивность теплового излучения гранулы, выразив её через $\epsilon(\omega)$. Провести окончательное вычисление для модели Друде, приняв $\epsilon(\omega) = \epsilon_b - \omega_p^2/(\omega(\omega + i\omega_T))$, считая, что температура мала, так что $\omega_T \ll \omega_p$.

§1.5. Поверхностные электромагнитные волны

Поверхностные электромагнитные волны. Поверхностные плазмоны: условия существования, фазовая и групповая скорости. Структура поля и плотности потока энергии. Исследование структуры электромагнитного поля связанной волны (поверхностного плазмона), распространяющейся вдоль границы раздела металл-диэлектрик. Получить условие существования поверхностного плазмона: $\epsilon_m < -\epsilon_d$, где

ϵ_m – диэлектрическая проницаемость металла, а ϵ_d – диэлектрика. Исследовать распределение потока энергии для плоского плазмона в случае, если в металле происходят слабые потери ($\epsilon_m'' > 0$)

• **Задача 1:** Рассмотреть границу раздела металла и диэлектрической среды, имеющих коэффициенты диэлектрической проницаемости ϵ_m и ϵ_d соответственно, так что $\epsilon_m < -\epsilon_d$, а $\epsilon_d > 0$ (при этом потери в обо-

их материалах отсутствуют). Выразить поверхностную плотность энергии \mathcal{E} в плоском поверхностном плазмоне через амплитуду электрического поля на поверхности раздела и диэлектрические проницаемости соприкасающихся сред. То же самое сделать для потока энергии отдельно в каждой среде и в целом. Непосредственно показать, что

$$v_g \mathcal{E} = S, \quad v_g = \frac{d\omega}{d\beta},$$

где S – полная поверхностная плотность потока энергии, v_g – групповая скорость, а $\beta(\omega)$ – закон дисперсии поверхностного плазмона.

• **Задача 2:** Пусть теперь в металле присутствуют малые потери, так что $\varepsilon''_m \ll |\varepsilon'_m|$. Введём декартову систему координат $Oxyz$, в которой поверхность раздела есть плоскость Oxy . Пусть поверхностный плазмон воз-

буждается синфазным движением сторонних зарядов с частотой ω в плоскости Oyz , тогда при $x > 0$ возбуждённая плоская поверхностная волна распространяется в направлении возрастающих x . Найти распределение среднего по времени потока энергии в пространстве. Нарисовать соответствующую картину в плоскости xz .

Дисперсия поверхностных плазмонов для модели Друде.

• **Задача 3:** Пусть дисперсия диэлектрической проницаемости диэлектрика пренебрежимо мала, а дисперсия диэлектрической проницаемости металла описывается моделью Друде $\varepsilon_m = \varepsilon_b - \omega_p^2 / (\omega(\omega + i\omega_\tau))$, где $\omega_\tau \ll \omega_p / \sqrt{\varepsilon_b}$, а ε_b – положительная константа. Найдите частоту ω_c , ниже которой возможны поверхностные плазмоны, а также дисперсию поверхностных плазмонов.

§1.6. Волноводы

Распространение волн в полых волноводах с идеально проводящими стенками. Волноводы с односвязными полостями. Дисперсия мод, частота отсечки. Определение длины распространения мод в полых металлических волноводах с учётом потерь на стенках. Практическое применение волноводов. Выражение всех компонент полей \mathbf{E} и \mathbf{H} через компоненты, направленные вдоль оси волновода, E_z и H_z ; классификация мод. Достаточные граничные условия для ТМ- и ТЕ-волн. Получение дисперсионного соотношения, минимальная частота распространения мод: выражение коэффициента затухания через поверхностный импеданс металла (граничные условия Леонтовича). Литература: [1, §91], [3, §14.1].

• **Задача 1:** Найти возможные типы волн в круглом волноводе радиуса a , считая его стенки идеально проводящими. Определить граничную частоту ω_0 для такого волновода. Найти коэффициенты затухания α разных типов волн в случае, если поверхностный импеданс стенок равен ζ . Литература: [3, стр. 628, задачи 14.12 и 14.13].

Распространение связанной моды вдоль металлической проволоки.

• **Задача 2:** Определить дисперсию аксиально симметричной моды металлической проволоки (в области рассматриваемых частот считать, что диэлектрическая проницаемость сердцевины меньше нуля). Отдельно рассмотреть длинноволновый предел. Литература: §??.

Связанные моды в плоских волноводах. Классификация связанных мод в плоском волноводе, ТЕ- и

ТМ-волны. Разделение ТЕ-мод на четные и нечетные, структура поля и собственные значения. Отсутствие частоты отсечки для четной ТЕ-моды низшего порядка. Аналогия с круглым волноводом. Литература: [4, §8.3].

• **Задача 3:** Определить дисперсию четных и нечетных связанных ТМ-волн плоского симметричного волновода.

• **Задача 4:** Отдельно рассмотреть некоторые моды в плоском симметричном волноводе.

i) Моду, не имеющую частоты обрезки: определить пространственную структуру электромагнитного поля и вектора поляризации для предела, когда частота много меньше самой низкой частоты отсечки.

ii) Рассмотреть моду с высоким номером: обсудить, как можно описать моду в квази-классическом приближении.

Коаксиальный волновод. Рассмотрение коаксиального волновода на языке уравнений Максвелла. Существование в коаксиальном волноводе полностью поперечной моды, не имеющей частоты отсечки. Литература: [1, §91].

Описание коаксиального волновода в терминах линии Лехера: погонные ёмкость и индуктивность волновода, волновое уравнение на напряжение и ток. Эквивалентность описания моды в терминах уравнений Максвелла и линии Лехера. Литература: [5, §143].

• **Задача 5:** Учесть затухание сигнала в коаксиальном волноводе за счёт потерь в скин-слое, и вычислить длину распространения главной моды. Внутренний радиус коаксиального волновода равен a , внешний – b , частота сигнала – ω , глубина скин-слоя – δ (предполагается нормальный скин-эффект).

§1.7. Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах.

Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах. Сечения рассеяния, поглощения и взаимодействия. Двумерный и трёхмерный случаи. Оптическая теорема.

Асимптотический вид электромагнитного поля вдали от рассеивающего тела: понятие амплитуды рассеяния; парциальные амплитуды рассеяния. Сечения взаимодействия, поглощения и рассеяния. Связь сечения рассеяния с амплитудой рассеяния. Трёхмерный случай: оптическая теорема. Литература: §3.4, [3, стр. 480, Задача 12.77].

• **Задача 1:** Вычислить сечение поглощения σ_a монохроматической электромагнитной волны проводящим шаром с малым поверхностным импедансом $\zeta = \zeta' + \zeta''$. Радиус шара мал по сравнению с длиной волны λ , но велик по сравнению с глубиной скин-слоя.

Предел идеального металла, предел малых длин волн.

Предел рассеяния на тонком стержне и на малом шаре субволнового диаметра; оценки по порядку величины для амплитуд рассеяния и поглощения. Прохождение света через коллоидные растворы металлических нано-частиц.

• **Задача 2:** Вычислить сечения поглощения σ_a и рассеяния σ_s монохроматической электромагнитной волны на металлическом шаре, размер которого a мал по сравнению с глубиной скин-слоя, $a \ll \delta$, полагая, что частота падающей волны ω близка к резонансной частоте дипольной поверхностной плазмонной моды шарика.

• **Задача 3:** Для предыдущей задачи рассмотреть рассеяние белого света на таком шаре: полагать, что спектр падающей волны плоский в диапазоне

$[\omega_r - \Delta/2, \omega_r + \Delta/2]$, где ширина спектра Δ велика по сравнению с шириной резонанса. Показать, что сечение взаимодействия не зависит от ширины резонанса (т.е. его добротности).

• **Задача 4:** Рассмотреть двумерный вариант Задачи 2, когда происходит рассеяние плоской монохроматической волны на бесконечном цилиндре с круговым сечением. Рассмотреть случай TE -волны, когда электрическое поле падающей волны ортогонально оси.

Одномерное рассеяние

• **Задача 5:** На плоскую пластину толщиной h падает по нормали электромагнитная волна с волновым вектором $k = \omega/c$, таким, что глубина скин-слоя велика по сравнению с толщиной пластинки, $\sqrt{\epsilon}|kh| \ll 1$, где ϵ - диэлектрическая проницаемость материала пластины (функция частоты). Не решая точные уравнения Максвелла, найти амплитуды отражения и прохождения волны через пластину, а также коэффициент поглощения волны в пластине. Написать условие, при котором отражение является слабым. *Литература: ??*

• **Задача 6:** Плоская электромагнитная волна падает нормальным образом к экрану, составленному из металлических шариков радиуса a , расположенных с периодом l , причем направление поляризации сонаправлено с линиями, вдоль которых выстроены шарики.

i) Считая, что $kl \ll 1$, найти средний коэффициент отражения волны от экрана.

ii) Определить величину его резонансного значения.

iii) Найти эффективную ширину резонансного пика, считая, что диэлектрическая проницаемость шариков $\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$.

§1.8. Трансформационная оптика

Численное решение уравнений Максвелла. Частный случай систем, излучающих электромагнитные волны. Perfectly Matched Layers (PMLs) граничные условия.

Уравнения в частных производных, готовые пакеты для их решения: Comsol Multiphysics, Ansys HFSS. Их возможности, ограничения и недостатки. Проблема ограничения области расчета: постановка граничных условий на "бесконечности". Создание слоя с большими мнимыми частями ϵ и μ для подавления волн; проблема отражения волн от границы области расчета. Аналитическое продолжение решений за "границу" области расчета, PML граничные условия. "Stealth"-технология невидимости самолетов. Литература: [6].

Принцип Ферма. Метаматериалы. Запись уравнений Максвелла в криволинейных координатах. Частный случай ортогональных координат. Трансформационная оптика: принципиальная возможность создания "невидимок".

Распространение световых лучей и принцип Ферма. Мираж в пустыне. Создание искусственных материалов, концепция метаатома, метаматериалы. Искривление траектории светового луча в криволинейных координатах. Запись уравнений Максвелла в произвольных координатах, эквивалентность замены координат и замены диэлектрических и магнитных проницаемостей. Частный случай ортогональных координат. Управление траекторией световых лучей с по-

мощью метаматериалов. Создание "невидимок": областей пространства, в которые не проникают световые лучи. Литература: [7].

• **Задача 1:** Одна из возможных замен координат, которая заставляет все световые лучи огибать цилиндрическую область радиусом a , устроена следующим об-

разом:

$$r' \rightarrow \frac{b-a}{b}r + a, z' \rightarrow z, \varphi' \rightarrow \varphi.$$

Определить тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости, которые были бы "эквивалентны" указанной замене координат. Литература: [7].

§1.9. Квази-стационарные поля.

Квазистационарные поля. Сведение уравнений Максвелла в квазистационарном пределе к виду уравнения диффузии. Условие квазистационарности электромагнитного поля. Система уравнений Максвелла в пренебрежении эффектами, связанными с конечностью скорости распространения электромагнитных возмущений. Вывод уравнений на электрическое и магнитное поля в квазистационарном пределе; аналогия с уравнением диффузии. Граничные условия на компоненты электромагнитного поля в квазистационарном пределе. Скорость затухания магнитного поля.

Литература: [1, §58].

• **Задача 1:** Определить наименьший из коэффициентов затухания магнитного поля в проводящем шаре.

Магнитная гидродинамика: вывод уравнения, эффект магнитного динамо. Система уравнений на эволюцию поля скорости проводящей жидкости во внешнем магнитном поле. Бездиссипативный предел; "вмороженность" силовых линий магнитного поля в вещество жидкости. Эффект магнитного динамо на примере крупномасштабного стационарного течения несжимаемой жидкости

Литература: [1, §65].

• **Задача 2:** Рассмотрим течение магнитной жидкости с большой проводимостью, когда коэффициент кинематической вязкости ν мал по сравнению с коэффициентом диффузии магнитного поля κ . Тогда вязкий

масштаб течения велик по сравнению с диффузионным масштабом, на котором изменяет магнитное поле. Если магнитное поле слабое, то течение магнитное жидкости возможно проводить в кинематическом режиме, когда влиянием магнитного поля на скорость жидкости можно пренебречь.

Пусть течение жидкости постоянно, и поле скорости задаётся линейным по координате выражением $v^i = \sigma^{ij}r^j$, которое становится неприменимым на масштабах, больших вязкого. Начальное распределение магнитного поля есть поля $\mathbf{B}_0 = \text{rot}(\mathbf{a} \exp(-r^2/l^2))$, где \mathbf{a} – некоторый вектор.

Учёт эффектов запаздывания в электрических цепях: получение поправок к сопротивлению цепи.

• **Задача 3:** Пусть имеется электрическая цепь с индуктивностью и активным сопротивлением. При полном пренебрежении эффектами запаздывания внутри цепи можно написать известную из курса общей физики связь между током и ЭДС. Найдите поправки к индуктивности и сопротивлению не пренебрегая запаздыванием, но считая, что выполняется квазистационарный закон Ома (связь между плотностью тока и полем), и что ток в каждый момент времени одинаков вдоль всей цепи. Дать интерпретацию полученным результатам, в частности, разложению по степеням частоты.

§1.10. Магнитостатика магнетиков.

Магнитное поле ферромагнетика. Базовые соотношения для статической энергии магнетиков. Бездивергентность магнитной индукции. Потенциальность магнитного поля, уравнение на потенциал.

• **Задача 1:** Найти поле \mathbf{B} для точечного диполя $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mu\delta(\mathbf{r})$.

• **Задача 2:** Найти поля \mathbf{B} и \mathbf{H} для шара с однородной намагниченностью: $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = M_0$, $r < R$, $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = 0$, $r > R$. Найти поля во всем пространстве (внутри и

вне шара).

• **Задача 3:** Найти поля \mathbf{B} и \mathbf{H} для бесконечного цилиндра с однородной намагниченностью M_0 вдоль и поперек оси цилиндра.

• **Задача 4:** Найти поля \mathbf{B} и \mathbf{H} для бесконечной пластины с однородной намагниченностью M_0 вдоль и поперек плоскости пластины.

Магнитная энергия ферромагнетиков, раз-

личные формы её записи.

Литература: §3.6.1.1

• **Задача 5:** Доказать теорему взаимности: если поле $\mathbf{B}_1(\mathbf{r})$ создается намагниченностью $\mathbf{M}_1(\mathbf{r})$ и поле $\mathbf{B}_2(\mathbf{r})$ – намагниченностью $\mathbf{M}_2(\mathbf{r})$, то:

$$\int \mathbf{M}_1 \mathbf{B}_2 d\mathbf{r} = \int \mathbf{M}_2 \mathbf{B}_1 d\mathbf{r}. \quad (1.3)$$

• **Задача 6:** Внутри шара радиуса R с однородной намагниченностью \mathbf{M}_0 вырезали шаровую же область радиуса $a < R$, в которой вектор намагниченности повернули на некоторый угол θ по отношению к \mathbf{M}_0 , сохранив его модуль. Найти изменение магнитной энергии за счет поворота, считая расположение области внутри шара произвольным.

• **Задача 7:** В условиях предыдущей задачи разворот намагниченности был осуществлен в двух непрерывающихся шаровых областях. Найти изменение маг-

нитной энергии, задав параметры областей и изменения намагниченности.

Энергия одноосного магнетика: энергии анизотропии и неоднородности. Энергия магнитной анизотропии, ее релятивистская природа. Энергия магнитной неоднородности, ее обменная природа. Феноменологические выражения для энергии анизотропии и энергии неоднородности. Связь структуры этих выражений с инвариантностью энергии по отношению к операции обращения времени.

• **Задача 8:** Показать, что с точностью до слагаемых, пропорциональных M^2 , практически постоянных в ферромагнетиках, энергия (3.53) может быть представлена в виде:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}_M^2 d\mathbf{r} - \int \mathbf{M} \mathbf{B}_0 d\mathbf{r} - \frac{\beta}{2} \int M_z^2 d\mathbf{r}, \quad (1.4)$$

где $\mathbf{H}_M = \mathbf{B}_M - 4\pi\mathbf{M}$.

§1.11. Доменная структура магнетиков. Динамика магнитного момента.

Доменная структура в одноосном кристалле, ширина и энергия доменной стенки. Причина образования доменов в ферромагнетике. Примеры доменных структур. Однодоменные частицы, критерий однодоменности. Определение структуры доменной границы в одноосном кристалле (блотовская доменная стенка). Выражения для ширины и энергии доменной границы.

Литература: [1, §43,45], [8, Стр. 242], §3.6

• **Задача 1:** Найти пороговое значение \mathbf{B}_0 , направленного перпендикулярно плоскости ферромагнитной пластины, выше которого образование доменов энергетически невыгодно.

тически невыгодно.

Динамика магнитного момента в магнетиках. Спиновый магнитный резонанс. Динамика вектора намагниченности в ферромагнетиках. Уравнение Ландау-Лифшица. Динамика доменной границы во внешнем магнитном поле.

• **Задача 2:** Найти собственные частоты малых колебаний шара, $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}$, $M^2 = M_0^2$, $|\mathbf{M}_0| \gg |\mathbf{m}|$ намагниченного вдоль оси анизотропии z .

§1.12. Нелинейная оптика

Нелинейная восприимчивость. Нелинейные поправки к линейной зависимости \mathbf{D} от \mathbf{E} . Нелинейная восприимчивость 2-го и 3-го порядков. Симметрия тензора нелинейной восприимчивости. Литература: [1, §107-108].

• **Задача 1:** Какие процессы описываются следующими нелинейными восприимчивостями: (а) $\chi_2(\omega, \omega)$, (б) $\chi_2(2\omega, -\omega)$, (в) $\chi_3(\omega, 2\omega, -2\omega)$?

• **Задача 2:** Газ свободных электронов концентрации N находится в поле плоской световой волны амплитудой E и частотой ω . Определить нелинейную поляризацию на частотах 2ω и 3ω .

Генерация 2-й гармоники. Нелинейный эффект 2-го порядка $\varepsilon_{i,kl}(-2\omega; \omega, \omega)$, экспериментальное наблюдение генерации 2-й гармоники. Качественная картина происходящего: движение электрона со слабой нелинейностью 2-го порядка. Эффективная перекачка энергии из основной волны в гармонику, условие синхронизма. Точное решение уравнений Максвелла. Литература: [9, §11.2], [1, §110].

• **Задача 3:** Определить угол синхронизма для генерации второй гармоники в одноосном кристалле с $n_e > n_o$ и с $n_e < n_o$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

• **Задача 4:** На плоскую пластину толщиной h падает по нормали электромагнитная волна с волновым вектором $k = \omega/c$, таким, что глубина скин-слоя велика по сравнению с толщиной пластинки, $\sqrt{|\varepsilon|}kh \ll 1$, где ε - диэлектрическая проницаемость материала пластины (функция частоты). Не решая точные уравнения Максвелла, найти амплитуды отражения и прохождения волны через пластину, а также коэффициент поглощения волны в пластине. Написать условие, при котором отражение является слабым.

• **Задача 5:** Плоская электромагнитная волна падает на шар, состоящий из материала с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. На частоте волны значение действительной части диэлектрической проницаемости близко к -2 . Размер шара a мал по сравнению с длиной падающей волны. Найти амплитуду электрического поля внутри шара, сечения рассеяния, поглощения и полное сечение взаимодействия волны на шаре.

• **Задача 6:** Как известно, для системы свободных зарядов при наличии трения, диэлектрическая проницаемость, как функция частоты, может быть записана следующим образом:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (2.1)$$

где ω_p - плазменная частота, а γ - декремент затухания. С другой стороны, связь между индукцией и полем можно записать в общем виде:

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E} + \int_{-\infty}^t \alpha(t-t')\mathbf{E}(t')dt' \quad (2.2)$$

Найти функцию α , соответствующую проницаемости 2.1.

• **Задача 7:** В среде, состоящей из свободных зарядов (без трения), и имеющей проницаемость:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (2.3)$$

распространяется плоская электромагнитная волна. Найти дисперсию такой волны, а также фазовую и групповую скорости.

• **Задача 8:** Цилиндрический волновод представляет собой бесконечный цилиндр из некоторого вещества, окруженный другим веществом (в том числе, в вакууме). Вдоль таких волноводов возможно распространение волн в которых поле экспоненциально падает при удалении от центра цилиндра (связанная мода). Найти условие, при котором возможно существование аксиально симметричной связанной моды, с длиной волны, много большей чем размер цилиндра, и найти дисперсию такой моды.

• **Задача 9:** Найти плотность и поток энергии в поверхностном плазмоне, распространяющемся вдоль бесконечной плоской границы металл-диэлектрик. Проницаемость диэлектрической среды считать единицей. Проницаемость металлической среды имеет вид:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (2.4)$$

• **Задача 10:** Пусть имеется электрическая цепь с индуктивностью и активным сопротивлением. При полном пренебрежении эффектами запаздывания внутри цепи можно написать известную из курса общей физики связь между током и ЭДС. Найдите поправки к индуктивности и сопротивлению не пренебрегая запаздыванием, но считая, что выполняется квазистационарный закон Ома (связь между плотностью тока и полем), и что ток в каждый момент времени одинаков вдоль всей цепи. Дать интерпретацию полученным результатам, в частности, разложению по степеням частоты.

• **Задача 11:** Найти сечение взаимодействия бесконечного цилиндра с волной, падающей нормально к его оси. Рассмотреть случаи разных поляризаций. Отдельно рассмотреть случай длинных волн (длинной, много большей чем радиус цилиндра).

• **Задача 12:** Рассмотрите нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$\left[-i\partial_x + \frac{\beta_2}{2} \partial_t^2 \right] \Phi = \gamma |\Phi|^2 \Phi, \quad \Phi = \Phi(t, x), \quad (2.5)$$

в котором коэффициент нелинейности положителен, $\gamma > 0$.

1) Плоские волны по-прежнему являются решением уравнения, как и в линейном пределе. Исследуйте, как зависит дисперсия плоских волн в зависимости от их амплитуды.

2) Рассмотрите устойчивость плоских волн на плоскости двух параметров – второй дисперсии β и мощности волны P . В каких областях волна оказывается устойчивой, а в каких нет?

3) Известно, что НУШ допускает солитонные решения. Рассмотрите односолитонное решение, имеющее вид

$$\Phi = \frac{\sqrt{P} e^{i\varphi}}{\text{ch}(\eta(t - t_c))} \quad (2.6)$$

Напишите уравнения на величины P (мощность сигнала), φ (фаза), ширина импульса $1/\eta$ и t_c (положение сигнала), вытекающие из НУШ. При решении предполагать, что указанные параметры зависят не более чем линейно от координат.

ОТДЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§3.1. Плоская электромагнитная волна

Рассмотрим распространение плоской монохроматической электромагнитной волны в неограниченной однородной среде с линейным откликом. Эволюция электромагнитного поля в такой среде описывается системой уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \partial_t \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial_t \hat{\mu} \mathbf{H}, \quad (3.1)$$

где диэлектрическая проницаемость $\hat{\epsilon}$ и магнитная восприимчивость $\hat{\mu}$ могут в общем случае являться тензорами второго ранга.

Поскольку мы рассматриваем распространение плоской монохроматической электромагнитной волны, то мы полагаем, что все поля зависят от времени и координат как $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. В результате исключения магнитного поля, получаем уравнение

$$(k^2 \delta^{ik} - k^i k^k - \epsilon^{ik}(\mathbf{k}, \omega) \omega^2) E^k = 0, \quad k^i \epsilon^{ik} E^k = 0 \quad (3.2)$$

для анизотропной среды (мы приняли среду немагнитной, $\hat{\mu} = 1$). Для изотропной среды можно сразу воспользоваться условием $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, что упрощает уравнение до вида

$$k^2 - \epsilon(\omega) \mu(\omega) \omega^2 = 0, \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = 0. \quad (3.3)$$

3.1.1 Монохроматическая волна в изотропной среде

В общем случае при действительной частоте волновой вектор волны оказывается комплексным. Разделим его действительную и мнимую части, представим волновой вектор волны в виде

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}'', \quad (3.4)$$

где \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' – действительные векторы. Разделяя действительную и мнимую части в (3.3), получаем систему уравнений

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \operatorname{Re}[\epsilon\mu], \quad 2\mathbf{k}'\mathbf{k}'' = \frac{\omega^2}{c^2} \operatorname{Im}[\epsilon\mu]. \quad (3.5)$$

3.1.1.1 Распространяющаяся плоская монохроматическая волна

Чаще всего под плоской волной подразумевают волну, в которой поле зависит только от одной координаты,

так что $\mathbf{k}' \parallel \mathbf{k}''$. В этом случае мнимая часть волнового вектора определяется равенством

$$k'' = \frac{\omega}{c} \operatorname{Im} \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (3.6)$$

Величина $\delta = 1/k''$ есть глубина проникновения волны в среду, на этой длине интенсивность волны падает в e^2 раз.

Можно ввести действительный единичный вектор \mathbf{n} , сонаправленный волновому вектору \mathbf{k} . Из уравнений Максвелла получаем, что связь между компонентами электрического и магнитного поля задаётся равенствами

$$\sqrt{\mu}[\mathbf{n}, \mathbf{H}] = -\sqrt{\epsilon}\mathbf{E}, \quad \sqrt{\epsilon}[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = \sqrt{\mu}\mathbf{H}. \quad (3.7)$$

Если ϵ и μ действительны, то это равенство справедливо не только для комплексных амплитуд, но и для самих действительных полей.

Показатели преломления и поглощения Для описания распространения волн в среде вместо непосредственно ϵ и μ (которое, будучи комплексными, содержат в себе 4 действительных параметра) часто выбирают пару действительных параметров – *показатель преломления* n и *показатель поглощения* k , которые определяются через формулу

$$n + ik = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (3.8)$$

Особенно это удобно, если известно, что среда немагнитная, т.е. $\mu = 1$. Тогда по n и k можно однозначно восстановить ϵ .

В частности, длина волны в среде λ и глубина проникновения δ равны

$$\lambda = \frac{2\pi}{k'} = \frac{\lambda_0}{n}, \quad \delta = \frac{1}{k''} = \frac{\lambda_0}{2\pi k} = \frac{n}{k} \frac{\lambda}{2\pi}, \quad (3.9)$$

где $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ – длина волны в вакууме на данной частоте. Если $k \ll n$, то волна по мере распространения в среде успевает претерпеть много пространственных колебаний, прежде чем заметно ослабеть по интенсивности; в этом случае среда называется *прозрачной*.

3.1.2 Распространение плоского волнового пакета в среде с дисперсией

Рассмотрим распространение плоского волнового пакета в фиксированной поляризации. Тогда электрическое поле $E(t, z)$ можно представить скалярной величиной,

где z – координата вдоль направления распространения волны, а t – время.

Волновое уравнение, учитывающее дисперсию среды, имеет вид

$$\partial_z^2 E = \partial_t^2 \int_0^\infty dt' \varepsilon(t') E(t-t') - f(t, z) \quad (3.10)$$

Для краткости записи мы приняли, что магнитная восприимчивость равна единице, $\mu = 1$, что в данном случае не ограничивает общности рассуждений. Сила f играет роль внешнего источника, возбуждающего волну; свободное электромагнитное поле соответствует $f = 0$. В частности, в силу f можно включить нелинейную по электрическому полю часть поляризации P^{NL} , положив таким образом $f = 4\pi \partial_t^2 P^{NL}$.

В Фурье-представлении уравнение (3.10) переписывается в виде

$$(k^2 - \beta^2(\omega)) E_{\omega, k} = f_{\omega, k}, \quad (3.11)$$

где волновой вектор ($\text{Re } \beta > 0$ при $\omega > 0$) есть

$$\beta^2(\omega) = \varepsilon(\omega) \omega^2.$$

Фурье-образ электрического поля определяется согласно равенству

$$E(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} (dk) \int_{-\infty}^{\infty} (d\omega) E_{\omega, k} \exp\{-i\omega t + ikz\},$$

где например, $(dk) \equiv dk/2\pi$,

3.1.2.1 Спектральная ширина импульса

Мы рассматриваем волну, имеющую узкую относительно спектральную ширину, т.е. почти монохроматическую.

Несущая частота. Мы предполагаем, что Фурье-компонента поля $E_{\omega, k}$ имеет максимум при некотором значении частоты ω_0 и вблизи волнового вектора $k_0 = \beta(\omega_0)$.

Отметим, что поскольку электрическое поле $E(t, z)$ действительно, то его Фурье-компонента обладает свойством симметрии

$$E_{-k, -\omega} = E_{\omega, k}^*.$$

Вследствие этого у Фурье-образа электрического поля $E_{\omega, k}^*$ имеется также максимум при $-k_0, -\omega_0$.

Узость спектральной ширины импульса. Мы предполагаем, что Фурье-компонента электрического поля $\tilde{E}(\omega, k)$ убывает при отклонении волнового вектора на Δk от значения k_0 , и при отклонении частоты на $\Delta \omega$ от частоты ω_0 . Относительная спектральная узость означает, что

$$\Delta k \ll k_0, \quad \Delta \omega \ll \omega_0.$$

3.1.2.2 Дисперсия

Вследствие того, что спектральная ширина рассматриваемых импульсов мала, см. Пункт 3.1.2.1, нам не нужно знать всю зависимость $\beta(\omega)$ волнового вектора от частоты, а необходимо знать только несколько первых производных на несущей частоте $\omega = \omega_0$. Мы вводим следующие обозначение для этих производных:

$$\beta_m = \frac{d^m \beta}{d\omega^m}.$$

Групповая скорость. Если мы удержим в дисперсии $\beta(\omega)$ только первую производную по частоте, то $\beta(\omega)$ представляется в виде

$$\beta(\omega) = k_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_0}, \quad (3.12)$$

где групповая скорость

$$v_0 = \frac{d\omega}{d\beta} \equiv \frac{1}{\beta_1}.$$

В силу волнового уравнения неопределённости в волновом векторе Δk и $\Delta \omega$ связаны между собой оценкой через групповую скорость

$$\Delta \omega \sim v_0 \Delta k.$$

Вторая дисперсия. Параметр β_2 называется *дисперсией групповой скорости*, в англоязычной литературе – *group delay dispersion*. Если на интересующей частоте он положителен, $\beta_2 > 0$, то говорят о нормальной дисперсии (*normal dispersion*). Если $\beta_2 < 0$, говорят об аномальной дисперсии (*anomalous dispersion*).

Часто вместо коэффициента β_2 пользуются другим коэффициентом

$$D = \frac{d\beta_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2, \quad (3.13)$$

называемым коэффициентом хроматической дисперсией (*group delay parameter*).

3.1.2.3 Переход в сопровождающую систему координат

Выделение огибающей. Представим Фурье-компоненту электрического поля в виде

$$E_{\omega, k} = \Phi_{k-k_0, \omega-\omega_0} + \Phi_{k+k_0, \omega+\omega_0}^*,$$

который предназначен для описания поведения $E_{\omega, k}$ вблизи значений k_0 волнового вектора и ω_0 частоты. Фурье-образ огибающей $\Phi_{\omega, k}$ имеет один максимум при нулевых значениях волнового вектора и частоты, и

убывает на $k \sim \Delta k$, $\omega \sim \Delta\omega$. Электрическое поле в координатном представлении можно написать в виде

$$E(t, z) = 2\text{Re} [e^{-i\omega_0 t + ik_0 z} \Phi(t, z)],$$

$$\Phi(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} (dk) (d\omega) \Phi_{\omega, k} e^{-i\omega t + ikz}.$$

Перепишем уравнение (3.11) в терминах огибающей Φ :

$$((k_0 - i\partial_z)^2 - \beta^2(\omega_0 + i\partial_t)) \Phi(t, z) = f_+, \quad (3.14)$$

где мы у силы f выделили огибающую f_+ ,

$$f = 2\text{Re}[f_+(t, z) \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z)],$$

предполагая, что в Фурье-представлении $f_{\omega, k}$ имеет узкие максимумы там же, где и $E_{\omega, k}$. При получении уравнения (3.14) мы пользовались соотношениями типа

$$\partial_z e^{ik_0 z} \Phi(z) = e^{ik_0 z} (ik_0 + \partial_z) \Phi(z).$$

$$\Phi(t - \tau) = e^{-\tau \partial_t} \Phi(t).$$

Сопровождающая (движущаяся) система координат. При описании движения импульсов с узкой спектральной шириной удобно перейти от простого времени t к времени запаздывания t_{ret} , оставив неизменной координату z :

$$t_{\text{ret}} = t - z/v_0 \quad z_{\text{new}} = z.$$

Смысл введённых новых координат следующий. Мы фиксируем положение приёмника на оптоволокне, иными словами, координату z_{new} . Время же мы начинаем отсчитывать не от абсолютного значения, а от момента, когда в точку расположения приёмника придёт импульс, распространяющийся со скоростью v_0 и пущенный из начала оптоволокна в нулевой момент времени по абсолютному отсчёту

При такой замене переменных частные производные по z_{new} и t преобразуются по закону

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_{\text{new}}} - \frac{1}{v_0} \frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}}$$

§3.2. Магнитооптика

Рассмотрим среду, которая является изотропной в состоянии покоя. В частности, в состоянии покоя тензор диэлектрической проницаемости среды пропорционален единичной матрице. Наложим внешнее постоянное магнитное поле на эту среду. В результате изотропия окажется нарушенной, поскольку в среде теперь есть выделенное направление – направление магнитного поля.

Перепишем (3.14) в сопровождающей системе координат, разложившись до второго порядка малости по ширине волнового пакета:

$$\left(-2ik_0 \frac{\partial}{\partial z_{\text{new}}} + 2k_0 \beta_2 \left(\frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}} \right)^2 + \dots \right) \Phi = f_+, \quad (3.15)$$

где многоточием обозначены вклады, пропорциональные перекрёстной производной по $z_{\text{new}}, t_{\text{ret}}$ и второй производной по z_{new} .

Характерное значение частных производных по координате и запаздывающему времени. Характерная величина производной по времени оценивается как

$$\frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}} \sim \Delta\omega \sim v_0 \Delta k.$$

Переход от простого времени к запаздывающему приводит к тому, что в волновом уравнении на $\Phi_{\omega, k}$ исключается первая производная по времени, тогда как первая производная по координате z не исчезает. Вследствие этого оценкой для производной по координате является

$$v_0 \frac{\partial}{\partial z_{\text{new}}} \sim \frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}} \right)^2 \sim \frac{\Delta k}{k_0} \Delta k \ll \frac{\partial}{\partial t_{\text{ret}}}. \quad (3.16)$$

Поэтому вторая производная по координате в волновом уравнении, написанном в сопровождающей системе координат, имеет дополнительную малость.

Уравнение на импульс в движущейся системе отсчёта. Таким образом, уравнение на огибающую в сопровождающей системе отсчёта приобретает вид уравнения Шредингера:

$$\left[-i\partial_z + \frac{\beta_2}{2} \partial_t^2 \right] \Phi = \frac{1}{2k_0} f_+. \quad (3.17)$$

При получении (3.17) мы пренебрегли в (3.15) высшими поправками по ширине импульса в соответствии с оценкой (3.16) (эти поправки были уже скрыты многоточием). Мы также опустили индексы 'new' и 'ret' у координаты и запаздывающего времени.

3.2.1 Феноменология

Предположим, что среда в отсутствии магнитного поля при интересующих нас частотах является прозрачной, тогда при наложении магнитного поля вероятнее всего ожидать, что среда по-прежнему останется прозрачной. В этом случае диэлектрическая проницаемость ε^{ij} в

присутствии магнитного поля имеет следующую структуру

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon_t (\delta^{ij} - h^i h^j) + \varepsilon_l h^i h^j + i\varepsilon_a \varepsilon^{ijk} H^k, \quad (3.18)$$

где коэффициенты ε_t , ε_l и ε_a являются функциями квадрата магнитного поля H^2 , а единичный вектор $h^i = H^i/H$ (таким образом, размерность ε_a отлична от размерностей $\varepsilon_{t,l}$). Условие (3.18) есть следствие обобщённого принципа симметрии кинетических коэффициентов

$$\varepsilon^{ji}(-\mathbf{H}) = \varepsilon^{ij}(\mathbf{H})$$

и предположения об отсутствии диссипации, которое выражается условием (3.43):

$$\varepsilon^{*ji} = \varepsilon^{ij},$$

при этом в ε^{ij} мы выделили чётную и нечётную по магнитному полю части.

3.2.2 Эффект Фарадея

Продольный магнитооптический эффект Фарадея заключается в том, что линейно поляризованный свет, распространяющийся вдоль магнитного поля, испытывает вращение плоскости поляризации при прохождении через среду, обладающую изотропией в отсутствие магнитного поля. Иными словами, две круговые поляризации света распространяются с разными фазовыми скоростями.

Найдём связь этих эффектов с константами ε_t и ε_a . Направим ось Oz декартовой системы координат по магнитному полю \mathbf{H}_0 . Для волны, распространяющейся вдоль магнитного поля, компонента электромагнитной индукции $D^z = 0$. В силу вида тензора диэлектрической проницаемости (3.18) электрическое поле волны также направлено нормально к полю. Поэтому волновое уравнение (3.2) для нашего частного случая переписывается в виде

$$[(ck)^2 - \omega^2 \varepsilon_t] \delta^{ik} - i\omega^2 \varepsilon_a H_0 \varepsilon^{ik} E^k = 0, \quad (3.19)$$

§3.3. Отражение и преломление волн на плоской поверхности раздела

Рассмотрим падение электромагнитной волны из вакуума на плоскую поверхность некоторого материала. Мы предполагаем, что материал однороден вдоль поверхности раздела, но вообще говоря, может быть неоднородным в направлении от поверхности раздела. Введём систему координат, в которой поверхность материала есть плоскость $z = 0$, а сам материал находится в области $z < 0$.

Цель настоящего Параграфа – описать отражение волн, падающих на поверхность материала из вакуума.

где единичный антисимметричный тензор определён согласно равенствам $\varepsilon^{ik} = -\varepsilon^{ki}$, $\varepsilon^{12} = 1$. Решением этого уравнения являются две круговые поляризации $E_{\omega\pm}$, распространяющиеся с волновыми векторами k_{\pm} :

$$\mathbf{E}_{\omega\pm} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}, \quad k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_t \pm H_0 \varepsilon_a}. \quad (3.20)$$

где для вектора поляризации приведены только xy -компоненты.

Если исходно (в точке $z = 0$) поляризация поля была линейной, то в ходе распространения волны получаем, что её поляризация меняется согласно закону

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\omega}(z) &\propto \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{ik_+z} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{ik_-z} \propto \\ &\propto e^{ikz} \begin{pmatrix} \cos(\delta k z) \\ \sin(\delta k z) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где средний волновой вектор $k = (k_+ + k_-)/2$, а разность волновых векторов $\delta k = (k_+ - k_-)/2$. Таким образом, поляризация линейно поляризованного света действительно поворачивается в процессе прохождения через рассматриваемую среду.

При относительно слабом магнитном поле мы можем считать, что антисимметричная добавка в тензор диэлектрической проницаемости мала, $H_0 \varepsilon_a \ll \varepsilon_t$, а сама величина ε_t слабо отличается от величины диэлектрической проницаемости ε_0 в отсутствие магнитного поля. Тогда обратный период поворота вектора поляризации даётся выражением,

$$\delta k = \frac{\omega \varepsilon_a H_0}{c 2\sqrt{\varepsilon_0}}. \quad (3.22)$$

Если справедливо предположение, что при уменьшении магнитного поля ε_a стремится к постоянному значению, то из (3.22) следует, что период поворота вектора поляризации волны обратно пропорционален магнитному полю.

3.3.1 Граничные условия в форме Леонтовича: общая форма

Граничные условия в форме Леонтовича выглядят следующим образом:

$$E^\alpha(t, \mathbf{r}^\perp) = \int_{-\infty}^t dt' \int d^2 r'^\perp K^{\alpha\beta}(t-t', \mathbf{r} - \mathbf{r}'^\perp) H^\beta(t', \mathbf{r}'^\perp) \quad (3.23)$$

на поверхности материала, т.е. при $z = 0$, где $\{\alpha, \beta\} = \{x, y\}$. Ядро \hat{K} имеет в общем случае как временную, так и пространственную дисперсию. Граничными условиями (3.23) полностью задаются отражательные свойства поверхности материала.

Покажем, что написание граничных условий в виде (3.23) действительно возможно. Для этого проинтегрируем уравнение Максвелла в пустоте $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}/c$ на интервале $(-\infty, +0)$ по нормальной координате z . Мы полагаем, что при $z = +0$ магнитное поле и магнитная индукция совпадают, $\mathbf{H} = \mathbf{B}$; кроме того, мы считаем, что при $z \rightarrow -\infty$ все поля исчезают. В результате получим:

$$E^\alpha(t) = -\frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{c} \int_{-\infty}^{+0} dz \partial_t H^\beta(t, z) + \partial_\alpha \int_{-\infty}^{+0} dz E^z(t, z), \quad (3.24)$$

где единичный антисимметричный тензор второго ранга задаётся условиями $\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}$ и $\epsilon^{xy} = 1$. В равенстве (3.24) стоят поля, взятые снизу от токи $z = +0$, при $z \leq 0$. Поскольку источник электромагнитных волн у нас предполагается находящимся сверху, то величины в области $z < 0$ причинно зависят от величин в точке $z = +0$; всё же поле задаётся двумя скалярными величинами, в качестве которых могут быть выбраны в т.ч. две касательные компоненты магнитного поля. Не смотря на то, что при $z = +0$ есть вклад волн, отражённых поверхностью, и потому причинно зависящих от величин при $z < 0$, можно показать, что учёт (бесконечно слабого) затухания в отражающем материале окончательно доказывает правомочность формулы (3.23), см. Пункт 3.3.1.1.

Если мы теперь проинтегрируем уравнение Максвелла $\text{rot } \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E}/c + 4\pi \mathbf{j}/c$ на интервале $(-\infty, +0)$, то получим эквивалентное уравнению (3.24):

$$H^\alpha(t) = \partial_\alpha \int_{-\infty}^{+0} dz H^z(t, z) + \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{c} \int_{-\infty}^{+0} dz \left(\partial_t E^\beta(t, z) + 4\pi j^\beta(t, z) \right). \quad (3.25)$$

Таким образом, граничные условия в форме Леонтовича (3.23) могут быть переписаны и в обратном виде, когда касательные компоненты магнитного поля считаются откликом на касательные компоненты электрического поля.

3.3.1.1 Приложение: проверка выполнения принципа причинности в граничном условии Леонтовича

Рассмотрим скалярное поле $A(t, z) = A_+(t, z) + A_-(t, z)$, где \pm соответствует волнам, распространяющимся соответственно в сторону больших и меньших z ; $z = 0$ мы

по-прежнему считаем границей раздела, область $z > 0$ заполнена однородной средой. Источник находится при некотором большом $z = L$, поэтому волна от источника, которая распространяется от него в сторону меньших z , доходит до границы и частично отражается, после чего распространяется в обратном направлении. Поэтому для величин вблизи поверхности мы можем написать

$$A_+(t, +0) = \int_0^\infty d\tau K(\tau) A_-(t, +0),$$

Перепишем то же самое в частотном представлении, также при $z = +0$

$$A_{+, \omega} = K_\omega A_{-, \omega}$$

Для дальнейшего важно заметить, что помимо отсутствия полюсов у K_ω в верхней части комплексной плоскости ω , в этой области K_ω также удовлетворяет условию

$$\text{Abs } K_\omega < 1, \quad \text{Im } \omega > 0. \quad (3.26)$$

Действительно, ситуация $\text{Im } \omega > 0$ соответствует экспоненциально растущей во времени волне, и по принципу причинности амплитуда отражённой волны не может быть больше амплитуды падающей. Учёт потерь при отражении, которые, вообще говоря, всегда присутствуют в веществе, делает неравенство строгим.

Равенство можно переписать в виде

$$A_{+, \omega} = \tilde{K}_\omega A_\omega, \quad \tilde{K}_\omega = \frac{K_\omega}{1 + K_\omega}, \quad (3.27)$$

причём в силу неравенства (3.25) у комплексной функции \tilde{K}_ω в верхней полуплоскости также нет полюсов. Равенство (3.27) показывает возможность постановки граничных условий при отражении волны от поверхности в форме (3.23).

3.3.2 Граничные условия в форме Леонтовича в случае скин-эффекта

В случае, когда поля проникают в материал на малую глубину δ , много меньшую длины λ падающей волны, $\delta \ll \lambda$, связь между касательными компонентами электрического и магнитного полей на поверхности материала можно считать локальной в пространстве, так что

$$E^\alpha(t) = \int^t dt' \zeta^{\alpha\beta}(t - t') H^\alpha(t'), \quad (3.28)$$

где ζ называется поверхностным импедансом. Если же материал изотропен в поперечной плоскости, то связь можно переписать в виде

$$\mathbf{E}_t = \int^t dt \zeta(t - t') [\mathbf{H}_t(t'), \mathbf{n}], \quad (3.29)$$

где индекс 't' означает проекцию на поперечную плоскость, а \mathbf{n} — нормаль к поверхности.

Смысл именованного параметра ζ “поверхностным импедансом” может быть прояснён, если установить связь между значением касательной компоненты \mathbf{E}_t электрического поля и поверхностного тока \mathbf{J}_t . Для этого в уравнении Максвелла $\text{rot } \mathbf{B} = -\partial_t \mathbf{E}/c + 4\pi \mathbf{j}/c$ на продольные компоненты опустим малое слагаемое $\partial_t \mathbf{E}/c$ и проинтегрируем его по области $z < +0$:

$$\frac{1}{\zeta} \mathbf{E}_t = [\mathbf{H}_t, \mathbf{n}] = \frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^{+0} dz \mathbf{j}_t \equiv \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_t. \quad (3.30)$$

§3.4. Оптическая теорема

Оптическая теорема связывает амплитуду рассеяния вперёд с полным сечением рассеяния, что может быть использовано для упрощения вычисления сечения рассеяния.

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, рассеивающуюся на некотором центре рассеяния. Перейдём к комплексным амплитудам, представив поле в виде $\tilde{\mathbf{E}} = 2 \text{Re}[\mathbf{E} \exp[-i\omega t]]$, где \mathbf{E} не зависит от времени. Тогда вектор Пойнтинга, усреднённый по периоду колебания электромагнитной волны, равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{2\pi} \text{Re}[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*],$$

Падающее поле представим в виде $\mathbf{E}_{\text{in},0} \exp[i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{r}]$. Тогда абсолютное значение плотности потока в падающей волне равно

$$J = \frac{c|\mathbf{E}_{\text{in},0}|^2}{2\pi}.$$

Полное сечение рассеяния σ (сечение взаимодействия) определяется как отношение суммы мощности I_s , рассеивающейся на центре рассеяния, и мощности I_a , поглощающейся им, к плотности потока энергии в падающей волне:

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_s, \quad \sigma_s = \frac{I_s}{J}, \quad \sigma_a = \frac{I_a}{J}. \quad (3.31)$$

Таким образом, мощность I есть мощность, отводящаяся из падающей волны; σ_r называется сечением рассеяния, σ_a – сечением поглощения.

Рассмотрим сначала трёх-мерный случай. Вдалеке от рассеивающего центра электромагнитное поле представляет из себя совокупность плоской и сферической

Таким образом, ζ есть (с точностью до множителя $4\pi/c$) коэффициент пропорциональности между поверхностным током и касательной компонентой электрического поля (т.е., удельным падением напряжения на единицу длины), что и оправдывает именование ζ поверхностным импедансом.

расходящейся волн,

$$\begin{aligned} E^i &= E_{\text{in}}^i + E_s^i \rightarrow \\ &\rightarrow E_{\text{in},0}^i \exp[i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{r}] + \frac{f^{ij} E_{\text{in}}^j}{r} \exp[ikr], \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $|\mathbf{k}_{\text{in}}| = k$. Рассеянная центром рассеяния мощность I_s равна

$$I_s = \int r^2 d\omega (\mathbf{S}_s \cdot \mathbf{n}), \quad \mathbf{S}_s = \frac{c}{2\pi} \text{Re}[\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s^*],$$

где интегрирование производится по сфере радиуса r , единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, тогда как поглощаемая рассеивателем мощность равна

$$I_a = - \int r^2 d\omega (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{2\pi} \text{Re}[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*].$$

Полный поток через поверхность большого радиуса r равен:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= -\frac{1}{J} \int r^2 d\omega (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) = -\sigma_s - \\ &- \frac{c}{2\pi J} \text{Re} \int r^2 d\omega ([\mathbf{E}_{\text{in}}, \mathbf{H}_s^*] + [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{\text{in}}^*]) \cdot \mathbf{n}, \end{aligned}$$

где квадратичный вклад по полю падающей волны опущен, поскольку даёт нуль. Используя равенства

$$\mathbf{H}_s = [\mathbf{n}, \mathbf{E}_s], \quad \mathbf{H}_{\text{in}} = [\mathbf{n}_{\text{in}}, \mathbf{E}_{\text{in}}], \quad (3.33)$$

где $\mathbf{n}_{\text{in}} = \mathbf{k}_{\text{in}}/k$, получаем

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_a = -\frac{c}{2\pi J} \text{Re} \int r d\omega f^{*ij} \left\{ E_{\text{in},0}^i E_{\text{in},0}^{*j} (1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\text{in}})) + (\mathbf{E}_{\text{in},0} \cdot \mathbf{n}) E_{\text{in},0}^{*j} (n^i + n_{\text{in}}^i) \right\} e^{i(\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{n} - k)r} \quad (3.34)$$

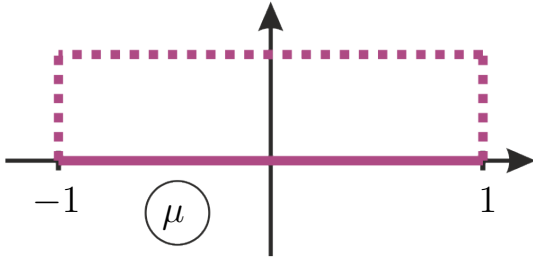


Рис. 3.1 Контур интегрирования по переменной $\mu \cos \theta$. Сплошной линией обозначен исходный контур, пунктирной – изменённый.

Для того, чтобы взять интеграл по телесному углу в (3.34), перейдём к сферическим координатам $\{r, \theta, \varphi\}$, направив ось Oz по волновому вектору \mathbf{k}_{in} падающей волны, и введём переменную $\mu = \cos \theta$. Интеграл в правой части (3.34) имеет вид и при $r \rightarrow \infty$ оценивается

как

$$r \int_{-1}^1 d\mu e^{ikr\mu} g(\mu) = \frac{1}{ik} (g(1) - g(-1)), \quad (3.35)$$

где $g(\mu)$ – некоторая функция, независящая от r . Действительно, поскольку $g(\mu)$ предполагается аналитической функцией, не имеющей особенностей на отрезке $[-1, 1]$, то мы можем деформировать контур интегрирования так, как показано на Рис. 3.1. При этом, в силу величины r , вклад в интеграл будут давать только боковые участки контура. Таким образом, приходим к (3.35).

В результате (3.34) упрощается (интегрирование по углу φ даёт множитель 2π , поскольку интеграл определяется углом $\theta = 0$),

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im} [f^{ij}(0) e^{*i} e^j], \quad e^i = \frac{E_{\text{in},0}^i}{|\mathbf{E}_{\text{in},0}|}. \quad (3.36)$$

Равенство (3.36) составляет содержание *оптической теоремы*: полное сечение рассеяния определяется мнимой частью амплитуды рассеяния вперёд.

§3.5. Энергия поля в диспергирующих средах

Рассмотрим неподвижную непрерывную среду, в которой возбуждено переменное электромагнитное поле. В этом пункте мы изучаем поток и плотность энергии, связанный с электромагнитным полем, а также скорость диссипации этой энергии в тепло.

3.5.1 Мгновенное значение потока энергии и временной производной плотности энергии

Прежде всего запишем плотность потока энергии – вектор Умова-Пойнтинга \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]. \quad (3.37)$$

В справедливости этого выражения можно убедиться, рассмотрев границу раздела рассматриваемой среды с вакуумом. Нормальная компонента потока энергии должна быть непрерывна при переходе через границу, и выражение (3.37) – единственное, удовлетворяющее этому условию, поскольку на границе раздела остаются непрерывными тангенциальные компоненты именно электрического поля \mathbf{E} и магнитного поля \mathbf{H} .

Мгновенное значение дивергенции от потока энергии должно быть равно мощности, передаваемой единице объёма со знаком минус:

$$\text{div } \mathbf{S} = -\frac{\partial W}{\partial t}.$$

Используя уравнения Максвелла в среде, получаем, что

$$\begin{aligned} -\text{div } \mathbf{S} &= \frac{\mathbf{E} \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H} \partial_t \mathbf{B}}{4\pi} = \\ &= \frac{\partial_t (E^2 + B^2)}{4\pi} + \mathbf{E} \partial_t \mathbf{P} - \mathbf{M} \partial_t \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

При выводе мы полагали, что внешние заряды отсутствуют, $\mathbf{j}_{\text{ext}} = 0$.

Перепишем полученные формулы (3.37, 3.38) на случай, когда волна является почти монохроматической и имеющей частоту ω . Любое поле, скажем, электрическое, можно представить в виде

$$\mathbf{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (d\omega') E_{\omega'} e^{-i\omega' t}, \quad (3.39)$$

где в силу вещественности поля $\mathbf{E}(t)$ выполняется $\mathbf{E}_{-\omega'} = \mathbf{E}_{\omega'}^*$. Почти монохроматичность означает, что характерное время изменения огибающей (см. Пункт 3.1.2.3)

$$\tilde{\mathbf{E}}(t) = \int_0^{+\infty} (d\omega') E_{\omega'} e^{-i(\omega' - \omega)t}$$

является большим по сравнению с периодом колебания поля $2\pi/\omega$.

При записи потока и плотности энергии, то есть квадратичной функции по полям, разумно провести

усреднение по периоду колебаний поля. В результате после усреднения исчезают слагаемые, осциллирующие с двойной частотой 2ω , и мы получаем

$$\mathbf{S} = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}^*], \quad (3.40)$$

$$\partial_t W = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\tilde{\mathbf{E}}[(\partial_t - i\omega)\tilde{\mathbf{D}}]^* + \tilde{\mathbf{H}}[(\partial_t - i\omega)\tilde{\mathbf{B}}]^* \right).$$

3.5.2 Скорость диссипации энергии

Для того, чтобы посчитать скорость диссипации Q электромагнитной в тепло, следует рассмотреть постоянную монохроматическую волну. Тогда скорость диссипации $Q = \partial_t W$, поскольку при постоянстве амплитуды колебаний поля вся уходящая в единицу объёма мощность переходит в тепло. Из (3.40) получаем

$$\partial_t W = \frac{\omega}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{D}}^* + \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{B}}^* \right). \quad (3.41)$$

Теперь примем, что электрическая и магнитная индукция линейно зависят от электрического и магнитного полей,

$$\tilde{D}^i = \hat{\varepsilon}^{ik}(\omega)\tilde{E}^k, \quad \tilde{B}^i = \hat{\mu}^{ik}(\omega)\tilde{H}^k,$$

где диэлектрическая восприимчивость $\hat{\varepsilon}$ и магнитная проницаемость $\hat{\mu}$ являются локальными операторами в пространстве, но имеют некоторое запаздывание во времени (т.е. частотную дисперсию). В результате получаем, что

$$\begin{aligned} Q &= \quad (3.42) \\ &= \frac{\omega}{4\pi} \left(i(\varepsilon^{*ki} - \varepsilon^{ik})\tilde{E}^i\tilde{E}^{*k} + i(\mu^{*ki} - \mu^{ik})\tilde{H}^i\tilde{H}^{*k} \right) = \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \left(\varepsilon_a^{ik}\tilde{E}^i\tilde{E}^{*k} + \mu_a^{ik}\tilde{H}^i\tilde{H}^{*k} \right), \end{aligned}$$

§3.6. Магнитостатика. Динамика магнитного момента в магнетиках.

3.6.1 Базовые соотношения

Если в среде есть ненулевая плотность магнитного момента (намагниченность) $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, то уравнения Максвелла в отсутствие внешних источников в статическом пределе (уравнения магнитостатики) имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (3.45)$$

Здесь $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ – магнитное поле (по историческим причинам называется индукцией магнитного поля). Обычно уравнения магнитостатики применяют для ситуаций, когда исследуемые эффекты происходят на масштабах, существенно превышающих межатомные расстояния в среде. В этом случае можно считать и намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, и поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ усредненными по флуктуациям на молекулярных масштабах. Удобно ввести векторное по-

где мы разложили тензора на эрмитову и антиэрмитову части, например,

$$\varepsilon^{ik} = \varepsilon_h^{ik} + i\varepsilon_a^{ik}, \quad \varepsilon_h^{*ki} = \varepsilon_h^{ik}, \quad \varepsilon_a^{*ki} = \varepsilon_a^{ik}.$$

В частности, для того, чтобы колебания электромагнитного поля на частоте ω не испытывали диссипации в среде, необходимо, чтобы анти-эрмитовы части диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости на данной частоте были нулевыми, т.е. чтобы выполнялись равенства

$$\varepsilon^{*ki}(\omega) = \varepsilon^{ik}(\omega), \quad \mu^{*ki}(\omega) = \mu^{ik}(\omega). \quad (3.43)$$

Отметим, что условие (3.43) является только необходимым, но не достаточным для того, чтобы среда оказалась прозрачной, см. Пункт 3.1.1. При выполнении условий (3.43) произведение $\varepsilon\mu$ может оказаться действительной отрицательной величиной – в этом случае среда не будет прозрачной, хотя поглощение в ней будет отсутствовать.

Наконец рассмотрим случай волнового пакета, когда время действие электрического поля конечно. Тогда имеет смысл говорить об объёмной плотности полного тепла W , выделившегося в единице объёма. Для упрощения записи возьмём частный случай изотропной среды, тогда

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt Q = \quad (3.44) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (d\omega) (\varepsilon''(\omega)|E_\omega|^2 + \mu''(\omega)|H_\omega|^2). \end{aligned}$$

ле $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ (которое по историческим причинам называется магнитным полем), являющееся в отсутствие внешних токов потенциальным:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (3.46)$$

Последнее уравнение означает, что $\mathbf{H} = -\nabla\phi$, где ϕ – скалярное поле, и определение магнитного поля по данному распределению намагниченности сводится к решению уравнения типа Пуассона:

$$\Delta\phi = 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (3.47)$$

3.6.1.1 Ферромагнетики и их магнитная энергия.

Ферромагнетик при макроскопическом описании характеризуется некоторой намагниченностью $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, которая

не исчезает при выключении внешних полей (спонтанная намагниченность). За ее образование ответственны спины электронов и обменное взаимодействие, имеющие квантовомеханическую природу. Ниже мы будем считать, что модуль намагниченности фиксирован $|\mathbf{M}(\mathbf{r})| = M_0$, направление же определяется минимумом энергии, к которой сейчас и переходим.

Если нет внешних полей, то фундаментальные законы в магнитостатическом пределе дают следующее выражение для магнитной энергии (гамильтониана) среды:

$$\mathcal{H}_m = \int \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} d\mathbf{r} - \int \mathbf{M}\mathbf{B} d\mathbf{r}. \quad (3.48)$$

Имеется тождество:

$$\int \mathbf{H}\mathbf{B} d\mathbf{r} = - \int \nabla\phi\mathbf{B} d\mathbf{r} = 0, \quad (3.49)$$

откуда следует другое выражение для магнитной энергии:

$$\mathcal{H}_m = -\frac{1}{2} \int \mathbf{M}\mathbf{B} d\mathbf{r}. \quad (3.50)$$

Энергия взаимодействия с внешним полем \mathbf{B}_0 входит аддитивно:

$$\mathcal{H}_m = -\frac{1}{2} \int \mathbf{M}\mathbf{B}_M d\mathbf{r} - \int \mathbf{M}\mathbf{B}_0 d\mathbf{r}. \quad (3.51)$$

\mathbf{B}_M обозначает магнитное поле, создаваемое только намагниченностью $\mathbf{M}(\mathbf{r})$.

3.6.2 Магнитные домены: доменные стенки

Образование доменной структуры обусловлено компромиссом между различными составляющими полной энергии образца. Существует широкая область условий, в которых требование минимизации энергии ведет распаду ферромагнетика на участки с различными направлениями вектора намагниченности \vec{M} . Намагниченность внутри доменов почти однородна, а переход от одного направления к другому происходит плавно и главным образом в пределах пограничного слоя - доменной стенки. Толщина областей перехода обычно мала по сравнению с размерами доменов. С термодинамической точки зрения соприкасающиеся домены представляют собой различные фазы ферромагнетика и имеет смысл к примеру говорить о поверхностном натяжении межфазных границ.

Зададимся целью определить пространственную структуру намагниченности при переходе между соседними доменами. Поскольку искомая зависимость диктуется условиями термодинамического равновесия, то необходимо прежде всего записать выражение для полной свободной энергии ферромагнетика. Эта величина складывается из энергии магнитной анизотропии

(на микроскопическом уровне обусловленной слабыми релятивистскими взаимодействиями между атомами ферромагнетика) и энергии магнитной неоднородности (главный вклад в которую дает обменное взаимодействие).

Спин-орбитальное взаимодействие в кристаллах приводит к "привязке" намагниченности к кристаллическим осям - магнитной анизотропии. Простейшим и достаточно распространенным является одноосная анизотропия, выражаемая в следующей модификации магнитного гамильтониана:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \int \mathbf{M}\mathbf{B}_M d\mathbf{r} - \int \mathbf{M}\mathbf{B}_0 d\mathbf{r} - \frac{\beta}{2} \int M_z^2 d\mathbf{r}. \quad (3.52)$$

M_z - компонента намагниченности вдоль оси анизотропии z . В равновесии при $\beta > 0$ однородная намагниченность \mathbf{M}_0 выстраивается параллельно оси z . Однако однородная по образцу намагниченность может не быть термодинамически равновесным состоянием. Данное выражение учитывает первые члены разложения энергии анизотропии в ряд по компонентам вектора \mathbf{M} . Начинается это разложение с квадратичных членов, поскольку энергия анизотропии есть четная функция намагниченности (энергия инвариантна по отношению к обращению времени, а намагниченность меняет знак при этой операции).

С точностью до слагаемых, пропорциональных M^2 , практически постоянных в ферромагнетиках, энергия (3.53) может быть представлена в виде:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}_M^2 d\mathbf{r} - \int \mathbf{M}\mathbf{B}_0 d\mathbf{r} - \beta \int M_z^2 d\mathbf{r}, \quad (3.53)$$

где $\mathbf{H}_M = \mathbf{B}_M - 4\pi\mathbf{M}$. Стремление системы к уменьшению модуля \mathbf{H}_M является причиной образования доменной структуры. Если при направлении \mathbf{M} вдоль оси анизотропии z поле \mathbf{H}_M оказывается равным нулю (такое может случиться при цилиндрической геометрии образца), то доменов не образуется. То же происходит при достаточно сильном внешнем поле \mathbf{B}_0 .

Если в силу малого объема магнетика магнитной энергией можно пренебречь, то отдельно объемная плотность энергии, связанная с анизотропией, может быть записана в виде

$$U_{ан} = \frac{\beta M^2}{2} \sin^2 \theta \quad (3.54)$$

где θ - угол между \mathbf{M} и главной осью симметрии кристалла z .

Энергия неоднородности ферромагнетика феноменологически может быть записана через производные \vec{M} по координатам. При этом предполагается относительная малость градиента направления вектора \vec{M} , поскольку существенное изменение направления магнитных моментов происходит на расстояниях больших по

сравнению с межатомными. Разложение энергии неоднородности начинается с квадратичных членов по пространственным производным магнитного момента

$$U_{\text{неодн}} = \frac{1}{2} \alpha_{ik} \frac{\partial M_l}{\partial x_i} \frac{\partial M_l}{\partial x_k} \quad (3.55)$$

Наличие членов линейных по производным запрещено в силу требования инвариантности энергии по отношению к обращению времени. В одноосном кристалле тензор α_{ik} имеет две независимые компоненты, поэтому в выбранной системе координат

$$U_{\text{неодн}} = \frac{\alpha_{\perp}}{2} \left[\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\alpha_{\parallel}}{2} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial z} \right)^2. \quad (3.56)$$

Покажем теперь, что в одноосном кристалле реализуется доменная структура в виде плоских слоев, параллельных главной оси симметрии ("легкой оси") и поворот намагниченности при этом происходит в плоскости границы между слоями (блоховская доменная стенка). Направим ось x по нормали к плоскости слоев, а ось z как и в указанных выше формулах вдоль главной оси кристалла. Мы ищем решение, в котором распределение намагниченности зависит только от координаты x и для компонент вектора \vec{M} справедливо

$$M_x = 0, \quad M_y = M \sin \theta, \quad M_z = M \cos \theta. \quad (3.57)$$

Тогда сумма поверхностной плотности энергий анизотропии и однородности может быть записана как

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx (U_{\text{ан}} + U_{\text{неодн}}) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\alpha_{\perp}}{2} (M_y'^2 + M_z'^2) + \frac{\beta}{2} M_y'^2 \right] = \\ &= \frac{M^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\alpha_{\perp} \theta'^2 + \beta \sin^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

где ' означает дифференцирование по x . Бесконечные пределы интегрирования выбраны в связи с предположением о малости ширины переходной области по сравнению с толщиной доменов. По этой же причине можно записать следующие граничные условия

$$\theta(+\infty) = 0, \quad \theta(-\infty) = \pi, \quad \frac{d\theta}{dx}(\pm\infty) = 0. \quad (3.59)$$

Решая вариационную задачу о минимизации полученного функционала, приходим к уравнению

$$\alpha_{\perp} \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \beta \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (3.60)$$

решение которого имеет вид

$$\cos \theta = \tanh\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha_{\perp}}} x\right) \quad (3.61)$$

Таким образом в качестве ширины доменной стенки можно принять величину $\delta \sim \sqrt{\alpha_{\perp}/\beta}$.

Выполняя интегрирование в выражении для энергии с учетом найденного распределения намагниченности, находим

$$W = 2M^2 \sqrt{\alpha_{\perp} \beta} \quad (3.62)$$

3.6.3 Ферромагнитный резонанс.

При отклонении конфигурации намагниченности от такой, которая реализует минимум энергии, возникнут магнитные колебания. Уравнения движения намагниченности в пренебрежении диссипацией имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = \left[\mathbf{M} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{M}} \right]. \quad (3.63)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ: ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОГО ОТКЛИКА

§4.1. Обобщённая восприимчивость

Пусть на некоторую систему действует возмущение, гамильтониан которого даётся выражением

$$\hat{V}(t) = -\hat{x}f(t), \quad (4.1)$$

где \hat{x} – оператор, соответствующий некоторой величине в системе, а $f(t)$ – внешняя “сила”, зависящая от времени. Если сила мала, то есть производит малое возмущение на систему, то среднее значение величины $x(t)$ линейно по этой силе,

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \alpha(t-t') dt' f(t'). \quad (4.2)$$

В (4.2) интегрирование производится только по временам $t' < t$, что гарантирует выполнения принципа причинности. Если доопределить восприимчивость $\alpha(\tau)$ на отрицательные времена, положив $\alpha(\tau < 0) = 0$, тогда интегрирование по времени в (4.2) можно распространить на все времена t' .

Монохроматическую силу f можно представить в виде

$$f(t) = f_{\omega} e^{-i\omega t} + f_{\omega}^* e^{i\omega t}. \quad (4.3)$$

Если сила f не монохроматическая, но имеет некоторый спектр, то она может быть представлена в виде интеграла Фурье,

$$f(t) = \int (d\omega) f_{\omega} e^{-i\omega t}, \quad (4.4)$$

При этом разумно предположить, что во временном представлении сила действует в течении некоторого времени τ_f .

В Фурье-представлении связь между средним значением x и силой f_{ω} имеет вид

$$x_{\omega} = \alpha_{\omega} f_{\omega}. \quad (4.5)$$

где α_{ω} определяется равенством

$$\alpha(t) = \int (d\omega) \alpha_{\omega} e^{-i\omega t}. \quad (4.6)$$

4.1.1 Аналитические свойства обобщённой восприимчивости: теорема Крамерса-Кронига

Из того, что во временном представлении восприимчивость является чисто действительной функцией следует

симметрия её действительной и мнимой частей в частотном представлении,

$$\alpha'(-\omega) = \alpha'(\omega), \quad \alpha''(-\omega) = -\alpha''(\omega). \quad (4.7)$$

Из принципа причинности следует, что в Фурье-представлении у комплексной функции $\alpha(\omega)$ что в верхней полуплоскости, когда $\text{Im } \omega > 0$, нет полюсов. В свою очередь, из этого факта следует равенство

$$\int d\omega' \frac{\alpha(\omega')}{\omega' - (\omega + i0)} = 2\pi i \alpha(\omega),$$

где интегрирование производится по действительной оси. Если в выписанном интегральном равенстве выделить действительную и мнимую части, то получим *соотношения Крамерса-Кронига*:

$$\alpha'(\omega) = \frac{1}{\pi} \int d\omega' \frac{\alpha''(\omega')}{\omega' - (\omega + i0)} \quad (4.8)$$

$$\alpha''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int d\omega' \frac{\alpha'(\omega')}{\omega' - (\omega + i0)}$$

где интегрирование вблизи полюса происходит в смысле главного значения.

4.1.2 Диссипация энергии в системе

Мгновенная выделяющаяся мощность в системе

$$Q = -x\dot{f}, \quad (4.9)$$

Если сила по прежнему гармоническая, (4.3), то после усреднение по времени, большом по сравнению с периодом колебания силы $2\pi/\omega$, получим, что

$$\begin{aligned} Q &= \alpha_{\omega} |f_{\omega}|^2 i\omega - \alpha_{\omega}^* |f_{\omega}|^2 i\omega = \\ &= 2\omega \alpha''_{\omega} |f_{\omega}|^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Таким образом, диссипация определяется мнимой частью восприимчивости.

Поскольку скорость диссипации в системе, которая находится в равновесии, должна быть неотрицательна, то мнимая часть диэлектрической проницаемости должна удовлетворять условию

$$\alpha''(\omega > 0) > 0. \quad (4.11)$$

Если сила действовала в течении ограниченного времени, так что может быть представлена в виде (4.4), то полное выделившееся тепло в системе равно

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} dt Q = \int_{-\infty}^{+\infty} (d\omega) \omega \alpha''(\omega) |f_\omega|^2. \quad (4.12)$$

4.1.3 Формула Кубо

Пусть теперь у нас есть несколько сил f^i и сопряжённых им величин \hat{x}^i , так что гамильтониан возмущения, производимого внешними силами, равен

$$\hat{V}(t) = - \sum_i \hat{x}^i f^i(t).$$

Среднее значение $x^i(t)$ этих величин будет линейно по силам, если они малы,

$$x^i(t) = \sum_k \int_0^\infty d\tau \alpha^{ik}(\tau) f^k(t - \tau).$$

При $i \neq k$ функция отклика α^{ik} может быть названа взаимной восприимчивостью.

Для восприимчивости $\alpha^{ik}(\tau)$ может быть получена формула Кубо, обобщающая ‘золотое правило Ферми’. Общее выражение для среднего значения величины \hat{x}^i есть

$$x^i(t) = \text{tr}\{\hat{\rho}(t) \hat{x}^i(t)\}, \quad (4.13)$$

где $\hat{\rho}$ – матрица плотности системы, и мы работаем в представлении взаимодействия, так что

$$i\hbar\partial_t \hat{\rho} = [\hat{\rho}, \hat{V}], \quad i\hbar\partial_t \hat{V} = [\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{V}],$$

где $\hat{\mathcal{H}}_0$ – гамильтониан невозмущённой системы. Раскладывая матрицу плотности в ряд по малому возмущению, получаем, что

$$\hat{\rho}(t) = \rho_0 + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t [\hat{\rho}_0, \hat{V}(t')] dt',$$

где матрица плотности ρ_0 соответствует статистическому равновесию, то есть является распределением Гиббса, $\hat{\rho}_0 = \exp\{-\hat{\mathcal{H}}_0 - F\}/T$, где F – свободная энергия.

Подставляя это в выражение (4.13), получаем выражение для восприимчивости:

$$\begin{aligned} \alpha^{ik}(\tau) &= -\frac{i}{\hbar} \text{tr} \{ [\hat{\rho}_0, \hat{x}^k(t)] \hat{x}^i(t + \tau) \} = \\ &= \frac{i}{\hbar} \text{tr} \{ \hat{\rho}_0 [\hat{x}^i(t + \tau), \hat{x}^k(t)] \}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

где время t может быть выбрано произвольно, поскольку $[\hat{\rho}_0, \hat{\mathcal{H}}_0] = 0$. Это соотношение называется *формулой Кубо* [10, §7.2, Ур.(7.25)].

4.1.4 Принцип симметрии коэффициентов обобщённой восприимчивости

Для взаимных восприимчивостей выполняется равенство симметрии

$$\alpha^{ik}(\tau; \mathbf{H}) = \alpha^{ki}(\tau; -\mathbf{H}). \quad (4.15)$$

Это равенство связано с инвариантностью динамики системы по отношению к обращению времени, поэтому требуется изменение знака перед магнитным полем \mathbf{H} . В (4.15) мы предполагаем, что обе величины x^i и x^k обладают одной и той же симметрией по отношению к операции обращения времени. Если же они обладают противоположной симметрией к операции обращения времени, в (4.15) надо поставить знак минус.

Докажем формулу (4.15). Из формулы Кубо (4.14) следует, что

$$\alpha^{ki}(\tau) = -\frac{i}{\hbar} \text{tr} \{ \hat{\rho}_0 [\hat{x}^i(t - \tau), \hat{x}^k(t)] \}.$$

Поскольку восприимчивость α^{ik} – действительная величина во временном представлении, то

$$\alpha^{ki}(\tau) = \frac{i}{\hbar} \text{tr} \{ \hat{\rho}_0 [\hat{x}^{i,*}(t - \tau), \hat{x}^{k,*}(t)] \}.$$

где * означает операцию комплексного сопряжения. Операция комплексного сопряжения, вместе с обращением знака магнитного поля, соответствует операции обращения времени. Таким образом, приходим к равенству

$$\alpha^{ki}(\tau) = \frac{i}{\hbar} \text{tr} \{ \hat{\rho}_0 [\hat{x}^i(-t + \tau), \hat{x}^k(-t)] \} \Big|_{\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}}.$$

В результате приходим к соотношению (4.15).

Литература

- [1] Л. Д. Ландау and Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика, том VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
- [2] А.А. Абрикосов. Основы теории металлов. М., Наука, 1987.
- [3] И.Н. Топтыгин. Современная электродинамика, часть 2. Теория электромагнитных явлений в веществе. Москва-Ижевск: РХД, 2005.
- [4] Д.Маркузе. Оптические волноводы. М.: МИР, 1974.
- [5] Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том III. Электричество. ФИЗМАТЛИТ, 4-е издание, стереотипное edition, 2004.
- [6] Steven Johnson. Notes on Perfectly Matched Layers (PMLs). Technical Report, Massachusetts Institute of Technology. 2010.
- [7] J.V. Pendry, D. Schurig, and D.R. Smith. Science, 312:1780, 2006.
- [8] Гуревич А.Г. and Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. Физматлит, 1994.
- [9] Ольхов О.А. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р. Основы физики. Курс общей физики. Том 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [10] Л.С.Левитов and А.В.Шитов. Функции Грина. Задачи и решения. ФИЗМАТЛИТ, 2003.

Оглавление

Программа курса: семинарские занятия	2
1.1. Уравнения Максвелла в среде; плоские волны	4
1.2. Термодинамика и кинетика переменного электромагнитного поля в среде с линейным откликом.	4
1.3. Анизотропные среды. Магнитооптика	5
1.4. Скин-эффект.	6
1.5. Поверхностные электромагнитные волны	6
1.6. Волноводы	7
1.7. Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах.	8
1.8. Трансформационная оптика	8
1.9. Квази-стационарные поля.	9
1.10. Магнитостатика магнетиков.	9
1.11. Доменная структура магнетиков. Динамика магнитного момента.	10
1.12. Нелинейная оптика	10
Задачи для самостоятельного решения	11
Отдельные вопросы электродинамики	13
3.1. Плоская электромагнитная волна	13
3.1.1 Монохроматическая волна в изотропной среде	13
3.1.2 Распространение плоского волнового пакета в среде с дисперсией	13
3.2. Магнитооптика	15
3.2.1 Феноменология	15
3.2.2 Эффект Фарадея	16
3.3. Отражение и преломление волн на плоской поверхности раздела	16
3.3.1 Граничные условия в форме Леонтовича: общая форма	16
3.3.2 Граничные условия в форме Леонтовича в случае скин-эффекта	17
3.4. Оптическая теорема	18
3.5. Энергия поля в диспергирующих средах.	19
3.5.1 Мгновенное значение потока энергии и временной производной плотности энергии	19
3.5.2 Скорость диссипации энергии	20
3.6. Магнитостатика. Динамика магнитного момента в магнетиках.	20
3.6.1 Базовые соотношения	20
3.6.2 Магнитные домены: доменные стенки	21
3.6.3 Ферромагнитный резонанс.	22
Приложение: теория линейного отклика	23
4.1. Обобщённая восприимчивость	23
4.1.1 Аналитические свойства обобщённой восприимчивости: теорема Крамерса-Кронига	23
4.1.2 Диссипация энергии в системе	23
4.1.3 Формула Кубо	24
4.1.4 Принцип симметрии коэффициентов обобщённой восприимчивости	24