
Семинары по курсу “Приближённые методы аналитических
вычислений”

Общая редакция И.В. Побойко

Планы семинарских занятий, на которых разбираются задачи,
разработаны группой, в которую входят И. Побойко, Н.
Степанов и Л. Сподынейко.

Программа курса

1. Размерные оценки в физике. Приближенное решение уравнений с «малым параметром». (М.В.Фейгельман)
2. Приближенное вычисление определенных интегралов. Интегралы с «малым параметром». (М.В.Фейгельман)
3. Вычисления интегралов и рядов методом перевала (Я.В.Фоминов)
4. Определенные интегралы, зависящие от параметра. (И.С.Бурмистров)
5. Оценка интегралов от быстро меняющихся и быстро-осциллирующих функций (И.С.Бурмистров)
6. Обыкновенные дифференциальные уравнения (И.В.Колоколов)
7. Обыкновенные дифференциальные уравнения с «малым параметром» (В.В.Лебедев)
8. Интегрирование в криволинейных координатах (И.В.Колоколов)
9. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений вариационным методом (В.В.Лебедев)
10. Теория возмущений в линейной алгебре для собственных чисел и собственных векторов конечномерных матриц; снятие вырождения возмущением. (Я.В.Фоминов)
11. Преобразования Фурье (М.А.Скворцов)
12. Основные принципы работы в программе Mathematica (М.А.Скворцов)

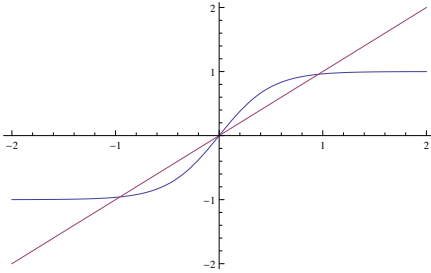
1 Трансцендентные уравнения

1.1 Задача 1

Рассмотрим уравнение $m = \tanh(m/T)$, задающее неявно зависимость $m(T)$. Оно всегда имеет тривиальное решение $m = 0$. Однако существует критическая точка T_c , вблизи которой появляется нетривиальное решение $m(T) \neq 0$. Найдём асимптотическое поведение этого решения вблизи критической точки.

Решение Решать задачу будем графически. Для удобства сделаем перемасштабирование — введём $\tilde{m} = m/T$; уравнение переписется как $T\tilde{m} = \tanh \tilde{m}$. Нарисуем на графике левую и правую часть уравнения.

Рис. 1: Сечение $y = \tanh x$ прямой



Функция $\tanh x$ ведет себя вблизи нуля линейно: $\tanh x \sim x$. Из-за симметрии уравнения относительно замены m на $-m$, всегда будут иметься как положительные, так и отрицательные решения; для конкретности, следить мы будем только за положительными. Из этого и из картинки можно сделать следующие выводы:

- при $T < 1$ прямая идет полого, и имеются точки пересечения обоих графиков, отличные от $m = 0$; это и есть наши нетривиальные решения.
- при $T \rightarrow 0$, прямая идет практически горизонтально. Ордината точки пересечения y стремится к 1, поэтому решение уравнения $m \rightarrow 1$.
- при $T > 1$, прямая идет более круто и нетривиальных точек пересечения нет.
- при $T = 1$, прямая касается графика $\tanh \tilde{m}$. Это и есть искомая критическая точка.

Перейдем обратно от переменной \tilde{m} к переменной m и найдем асимптотику аналитически. Видно, что вблизи критической точки, $m(T)$ близко к нулю. Это позволяет нам разложить гиперболический тангенс по малости своего аргумента по формуле Тейлора, и переписать уравнение приближенно как:

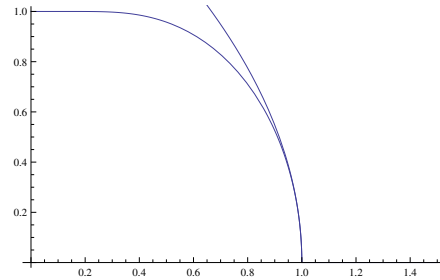
$$m \approx \frac{m}{T} - \frac{1}{3} \left(\frac{m}{T}\right)^3$$

Помимо тривиального решения $m = 0$, имеется также нетривиальное решение, которое в главном порядке по $1 - T$ записывается как:

$$m(T) \approx \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - T}, T \rightarrow 1$$

Можно сверить асимптотику с точным решением, полученным численно. Видно, что их поведение вблизи критической точки с хорошей точностью совпадает.

Рис. 2: Точное решение и асимптотика



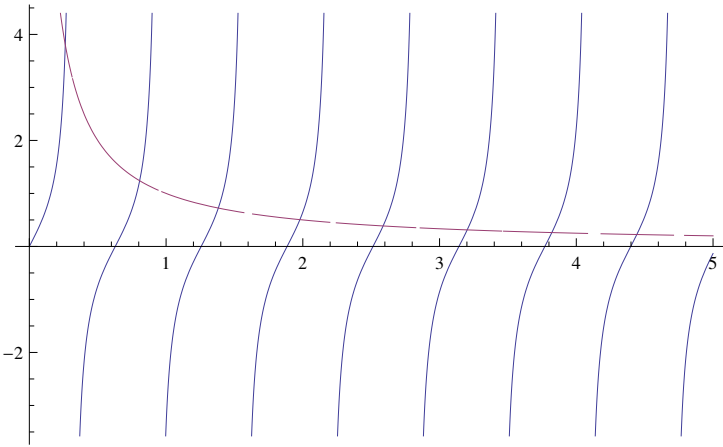
1.2 Задача 2

Рассмотрим уравнение $\tan Ax = \frac{1}{x}$. Его решения нумеруются натуральным числом n . Найдём асимптотическое поведение решений при $n \ll A$ и $n \gg A$. Параметр $A \gg 1$.

Решение Будем решать уравнение опять графически. Нарисуем левую и правую часть уравнения.

Видно, что имеется целая серия точек пересечения, которые являются решением нашего уравнения. Из картинки также можно сделать вывод о том, вблизи каких точек расположены корни в обоих случаях и в окрестности каких точек стоит искать решение.

Случай $n \ll A$ Период тангенса мал, поэтому решения лежат вблизи нуля. Тем самым, ордината точек пересечения велика, и наши решения лежат вблизи вертикальных

Рис. 3: $\tan Ax = \frac{1}{x}$ 

асимптот тангенса $x_n \approx \frac{1}{A} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right)$. Найдём первую поправку к этому выражению. Для этого рассмотрим $\delta_n = A \left(x - \frac{1}{A} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) \right) \ll 1$; делая такую подстановку, мы приходим к уравнению

$$-\cot(\delta_n) = \frac{A}{\delta_n + \frac{\pi}{2} + \pi n}$$

Теперь займемся разложением. Вблизи нуля функция $\cot x \sim \frac{1}{x}$, справа же $\delta_n \ll 1$ и ей можно пренебречь. Получаем поправку и ответ:

$$\begin{aligned} \delta_n &\approx -\frac{1}{A} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) \\ x_n &\approx \frac{1}{A} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) - \frac{1}{A^2} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) \end{aligned}$$

Случай $n \gg A$ В этом случае решения $Ax_n \gg 1$, что значит, что решения стоит искать вблизи нулей тангенса $x_n \approx \frac{\pi n}{A}$. Аналогичным путем найдем поправки к этому выражению. Положим $\delta_n = A \left(x - \frac{\pi n}{A} \right) \ll 1$, подставим в уравнение:

$$\tan(\delta_n) = \frac{A}{\delta_n + \pi n}$$

Раскладывая тангенс около нуля и пренебрегая δ_n справа, получим поправку и ответ:

$$\begin{aligned} \delta_n &\approx \frac{A}{\pi n} \\ x_n &\approx \frac{\pi n}{A} + \frac{1}{\pi n} \end{aligned}$$

1.3 Задачи для домашнего решения

Задачи 1 и 2 Найти приближенно решения следующих уравнений:

$$\begin{aligned} x &= e^{-\alpha x} \\ x &= 1 + e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

при $\alpha \gg 1$ и $\alpha \ll 1$.

Задача 3 (“зонная задача”) Рассмотрим неравенство

$$\left| \cos x + \alpha \frac{\sin x}{x} \right| > 1$$

При малых α на числовой оси располагается бесконечное количество узких “зон” для x , при которых это неравенство выполняется. Найти асимптотическое поведение ширины d_n этих зон при $n \gg 1$.

2 Интегралы с малым параметром

2.1 Задача 1

При $x \gg 1$ и $x \ll 1$ найдём асимптотики интеграла

$$I(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$$

Решение

Случай $x \ll 1$ Подынтегральная функция аналитична в нуле, поэтому можно просто разложить $\cos t$ в ряд Тейлора; имеем:

$$I(x) \approx \int_0^x \frac{t^2/2}{t} dt = \frac{1}{4}x^2$$

Случай $x \gg 1$ Тут для интеграла важна вся область интегрирования; это связано с тем, что при $x \rightarrow \infty$ этот интеграл расходится. Для выделения ведущей асимптотики можно воспользоваться трюком. Во-первых, поведение функции в нуле аналитично, поэтому область интегрирования в окрестности нуля можно “отщепить”:

$$I(x) = \left(\int_0^1 + \int_1^x \right) \frac{1 - \cos t}{t} dt$$

Поскольку на области интегрирования $\cos x$ успевает осциллировать много раз, во втором слагаемом мы можем его выбросить (известно, что $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ сходится и равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому при выбрасывании косинуса мы потеряем некую константу порядка единицы; ожидается, что она будет мала на фоне основной асимптотики). Во-вторых, поскольку подынтегральная функция аналитична в нуле, то первое слагаемое тоже даст число порядка 1. Таким образом формально можно записать:

$$I(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} + O(1) \approx \ln(x)$$

На фоне большого слагаемого $\ln x \gg 1$ (при $x \gg 1$), выброшенные константы порядка единицы действительно являются малой добавкой. Это называется взятием интеграла с логарифмической точностью. Более точное вычисление асимптотики дает ответ $\ln x + C + o(1)$, где $C \approx 0.577$ — постоянная Эйлера-Маскерони.

2.2 Задача 2

При $a \gg b$ и $a \ll b$ найдём асимптотики интеграла:

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{\exp(-x/a)}{\sqrt{x(x+b)}} dx$$

Решение Обезразмерим интеграл. Введем переменную $t = \frac{x}{a}$, имеем:

$$I(a, b) \equiv I\left(\frac{b}{a}\right) = \int_0^\infty \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t(t + \frac{b}{a})}} dt$$

Случай $b \gg a$ Из-за экспоненты, подынтегральное выражение быстро затухает на масштабах $t \sim 1$ вблизи нуля. Поэтому в области, где “набирается” интеграл, в знаменателе можно выбросить t на фоне большого члена $\frac{b}{a}$. Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \int_0^\infty \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t}} dt$$

Заменой $t = z^2$ этот интеграл сводится к известному интегралу Пуассона

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \sqrt{\frac{\pi a}{b}}$$

Случай $b \ll a$ Тут экспонента по-прежнему затухает очень быстро на масштабах порядка 1 вблизи нуля. Однако, если выбросить $\frac{b}{a}$ в знаменателе, мы получим расходящийся интеграл — около нуля подынтегральная функция имеет асимптотику $\frac{1}{t}$, и интеграл от нее расходится логарифмически. Поэтому тут существенная область интегрирования теперь — вблизи нуля. Отщепляя несущественную область интегрирования вблизи бесконечности (интеграл по которой, в силу его сходимости, будет числом порядка 1 и будет параметрически мал); кроме того, заменяя экспоненту на 1, мы получим:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t(t + \frac{b}{a})}} dt \approx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(t + \frac{b}{a})}} dt$$

Этот интеграл уже можно просто взять, введя замену $t = \frac{b}{a} \sinh^2 u$:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx 2 \operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

Для гиперболического арксинуса есть простое выражение через элементарные функции: $\operatorname{arcsinh}(a) = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$. Оставляя ведущие члены, и выбрасывая малые константы на фоне большой основной асимптотики:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \ln \frac{a}{b} \gg 1$$

2.3 Задача 3

При $a \ll b$ и $a \gg b$ найдём асимптотики интеграла:

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{x}{a}\right)}{x(x^2 + b^2)} dx$$

Решение Обезразмерим интеграл, введя переменную $t = \frac{x}{a}$. Имеем:

$$I(a, b) = \frac{1}{a^2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t(t^2 + \frac{b^2}{a^2})} dt \equiv \frac{1}{a^2} I\left(\frac{b}{a}\right)$$

Случай $a \gg b$ Если выбросить $\frac{b^2}{a^2} \ll 1$ по сравнению с t в знаменателе, то мы получим расходящийся как $\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}$ в нуле интеграл. Из этого можно заключить, что основная область, где интеграл набирается — вблизи нуля. Поступая иначе — раскладывая $\sin t$ по формуле Тейлора — имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{a}{b} \operatorname{arctan}\left(\frac{b}{a}t\right) \Big|_0^\infty = \frac{\pi a}{2b}$$

$$I(a, b) \approx \frac{\pi}{2ab}$$

Случай $a \ll b$ Из-за осциллирующего синуса, интеграл от функции $\frac{\sin t}{t}$ набирается на масштабах порядка 1 вблизи нуля. Поэтому в знаменателе можно выбросить t^2 на фоне $\frac{b^2}{a^2} \gg 1$. Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \frac{a^2}{b^2} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi a^2}{2b^2}$$

$$I(a, b) \approx \frac{\pi}{2b^2}$$

2.4 Задачи для домашнего решения

Задача 1 При $\alpha \ll 1$ найти асимптотическое поведение интеграла

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \exp(-x^2 - \alpha x^4) dx$$

Задача 2 При $x \gg 1$ и $x \ll 1$ найти асимптотическое поведение интеграла

$$I(x) = \int_x^\infty \exp(-t^4) dt$$

Задача 3 При целых $n \gg 1$ для случаев $a \gg b$ и $a \ll b$ найти асимптотическое поведение интеграла

$$I_n(a, b) = \int_0^b \frac{x^n \cdot dx}{e^{x/a} - 1}$$

Задача 4 При $a \ll 1$ найти асимптотическое поведение интеграла

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{x \cdot dx}{a^2 x^2 + (1 - x^2)^2}$$

Задача 5 При $a \ll 1$ найти асимптотическое поведение интеграла

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x/a)}{\sin(x)} dx$$

Задача 6 При $a \gg 1$ и $a \ll 1$ найти асимптотическое поведение интеграла

$$I(a) = \int_{-a}^a \frac{\cosh(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

3 Метод перевала

3.1 Задача 1

При $z \gg 1$ найдём асимптотику гамма-функции, определяемой выражением:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt$$

Решение Покажем сперва, чем интересна гамма-функция. Во-первых, проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = -t^z e^{-t} \Big|_0^{\infty} + \\ &+ \int_0^{\infty} z t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z) \end{aligned}$$

Мы получили рекуррентное соотношение. Поскольку $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$, то $\Gamma(n+1) = n!$. Во-вторых, значение интеграла Пуассона, с которым мы сталкивались ранее, тоже выражается через Гамма-функцию:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

откуда следует, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Кроме того, через гамма-функцию легко выражаются интегралы вида:

$$\begin{aligned} I(n, m) &= \int_0^{\infty} x^n \exp(-x^m) dx = \int_0^{\infty} t^{\frac{n}{m}} e^{-t} \cdot \frac{1}{m} t^{\frac{1}{m}-1} dt = \\ &= \frac{1}{m} \int_0^{\infty} t^{\frac{n+1}{m}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) \end{aligned}$$

Займёмся теперь поиском асимптотики. Перепишем интеграл в виде:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} \exp(-t + z \ln t) \cdot dt$$

Найдём стационарные точки функции $f(t) = -t + z \ln t$ и разложим ее до второго порядка малости в их окрестности:

$$f'(t) = -1 + \frac{z}{t} \Rightarrow t_0 = z \Rightarrow f(t_0) = -z + z \ln z$$

$$f''(t) = -\frac{z}{t^2} \Rightarrow f''(t_0) = -\frac{1}{z}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-z + z \ln z - \frac{(t-z)^2}{2z}\right) dt = \\ &= \sqrt{2\pi z} \cdot \exp(z \ln z - z) \end{aligned}$$

В случае натуральных $z = n \in \mathbb{N}$, мы получаем известную формулу Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

3.2 Задача 2

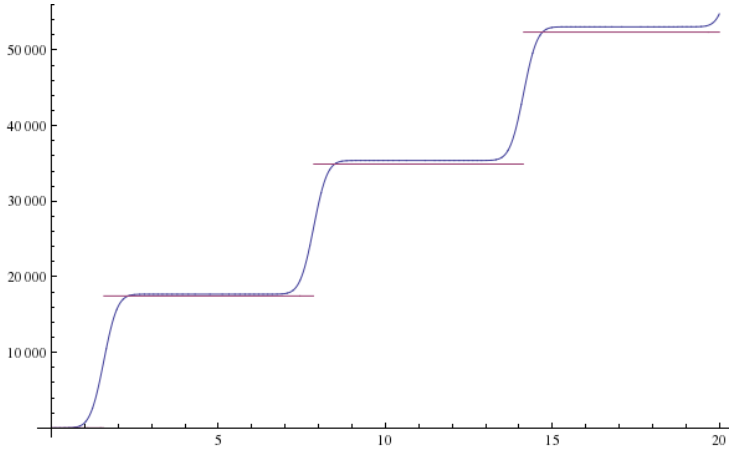
При $a \gg 1$ и различных x найдём поведение интеграла

$$I(a, x) = \int_0^x \exp(a \cdot \sin t) dt$$

Решение Особенность этой задачи заключается в том, что теперь у функции в показателе экспоненты бесконечное множество стационарных точек. Они определяются уравнением $f'(t) = a \cos t = 0 \Rightarrow t_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$; при этом ровно половина из них — лишь $t_{2n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ — являются локальными максимумами. Вклад в интеграл от окрестности каждой стационарной точки тоже легко определить:

$$I_{2n} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(a - \frac{a}{2}(t - t_{2n})^2\right) dt \approx \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^a$$

Займёмся теперь поведением нашего интеграла. По мере увеличения x , в область интегрирования будет попадать больше и больше перевальных точек. Вклад от каждой точки — постоянный; поэтому x будет достигать t_{2n} , функция будет испытывать резкий скачок на величину, примерно равную вкладу от одной перевальной точки. Таким образом, график функции будет представлять собой “лесенку”; ширина перехода ступеньки будет порядка $\sim \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Рис. 4: $I(a, x)$ и асимптотика

Важно однако отметить, что погрешность от реального значения интеграла такой функции по периоду отличается от аппроксимации, полученной методом перевала; и при больших x , когда имеется вклад от большого количества перевальных точек, эта погрешность складывается. Этой погрешностью можно пренебречь при $x \lesssim a$, поскольку погрешность от каждой перевальной точки - порядка $\sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^a \cdot O\left(\frac{1}{a}\right)$.

3.3 Задача 3

При $N \gg 1$ и $|\alpha| < 1$ найдём асимптотическое поведение интеграла

$$I(N) = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(-N(\cosh x + \cosh y + \alpha xy)) dx \cdot dy$$

Решение В многомерном случае, стационарная точка определяется условием $\text{grad} f(x, y) = 0$, то есть:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sinh x + \alpha y = 0 \\ \sinh y + \alpha x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Дальше следует поступать абсолютно аналогично. Разло-

жение вблизи стационарной точки дает:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx -N \left(1 + \frac{x^2}{2} + 1 + \frac{y^2}{2} + \alpha xy \right) = \\ &= -2N + N \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \alpha xy \right) \end{aligned}$$

В этом случае применение метода перевала сводится к взятию многомерного интеграла Пуассона (общий вид такого интеграла - когда в показателе экспоненты стоит некая квадратичная форма). Этот интеграл можно взять, выделяя полный квадрат:

$$\begin{aligned} I(N) &\approx \iint \exp \left(-2N - N \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \alpha xy \right) \right) dx dy = \\ &= e^{-2N} \iint \exp \left(-\frac{N}{2} \left((x - \alpha y)^2 + (1 - \alpha^2) y^2 \right) \right) dx dy = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{N(1 - \alpha^2)}} e^{-2N} = \frac{2\pi}{N\sqrt{1 - \alpha^2}} e^{-2N} \end{aligned}$$

Это и есть искомая асимптотика. Тут видно, зачем нужно условие $|\alpha| < 1$: если $|\alpha| \geq 1$, при y^2 в показателе экспоненты стоит положительная величина, из-за чего соответствующий интеграл расходится. Поскольку исходный интеграл, очевидно, сходится (функция $\cosh x$ - быстро растет на бесконечности), то это значит лишь что точка $(0, 0)$ уже не является минимумом функции в показателе экспоненты, и перевальная точка смещается.

3.4 Задача 4

При $A \gg 1$ найдём асимптотическое поведение интеграла

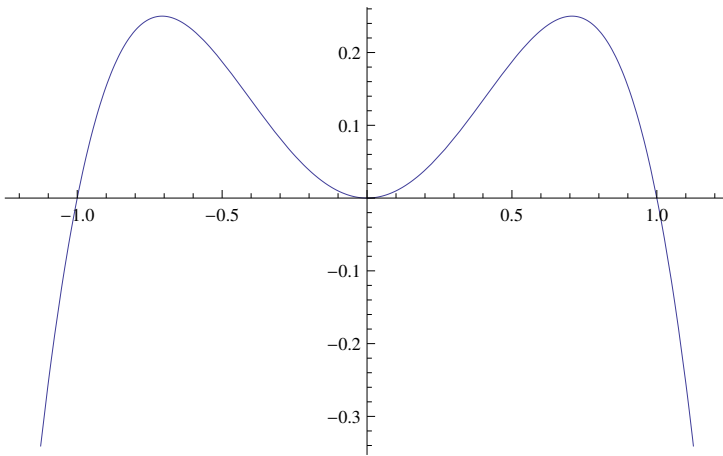
$$I(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A(x^4 - x^2)) dx$$

Решение Функция в показателе экспоненты имеет два максимума:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Значения функции в перевальных точках равны $f(x_{1,2}) = \frac{A}{4}$; вторые производные:

$$f''(x_{1,2}) = -A(12x_{1,2}^2 - 2) = -4A$$

Рис. 5: $y = x^2 - x^4$ 

Поэтому в окрестности каждой из точек функция представляется как:

$$f(x) \approx \frac{A}{4} - 2A(x - x_{1,2})^2$$

Обе точки дадут одинаковый вклад в перевальную оценку; поэтому для асимптотики имеем:

$$\begin{aligned} I(A) &\approx 2 \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{A}{4} - 2A(x - x_{1,2})^2\right) dx = \\ &= 2e^{A/4} \sqrt{\frac{\pi}{2A}} = \sqrt{\frac{2\pi}{A}} e^{A/4} \end{aligned}$$

3.5 Задача 5

При $A \gg 1$ найдём асимптотическое поведение интеграла

$$I(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\left(\cosh x - \frac{x^2}{2}\right)\right) dx$$

Решение Поскольку функция $\cosh x$ вблизи нуля раскладывается как $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$, то видно, что ведущий член разложения функции в экспоненте имеет порядок x^4 . Поэтому следуя идее метода перевала о разложении функции в экспоненте в ряд около стационарной точки, для

асимптотики этого интеграла имеем:

$$I(A) \approx e^{-A} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{A}{24}x^4\right) dx$$

Этот интеграл аналогичен интегралу Пуассона; его можно взять подстановкой $t = \frac{A}{24}x^4$, сводящей его к гамма-функции:

$$\begin{aligned} I(A) &\approx e^{-A} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \left(\frac{24}{A}\right)^{1/4} \frac{1}{4} t^{-3/4} dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{24}{A}\right)^{1/4} e^{-A} \cdot \int_0^{\infty} t^{-3/4} e^{-t} dt = \\ &= \left(\frac{3}{2A}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot e^{-A} \end{aligned}$$

Тут $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3.62561$ — число, известная константа; она не выражается через известные мировые константы (π , e , C , ...); однако это и не требуется.

3.6 Задачи для домашнего решения

Задача 1 Найти асимптотическое поведение интеграла при $\alpha \ll \beta$ или $\alpha \gg \beta$

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x \cdot \arctan(\beta x)) dx$$

Задача 2 Найти асимптотическое поведение ряда при $A \gg 1$, $N \gg A$:

$$S(N, A) = \sum_{n=0}^{\infty} n^N e^{-An^2}$$

Задача 3 Найти асимптотическое поведение интеграла при $N \gg 1$:

$$I(N) = \int_N^{\infty} (x - N)^2 e^{-x^2} dx$$

Задача 4* Найти асимптотическое поведение интеграла при $N \gg 1$, $\varepsilon \ll 1$, $s \sim 1$:

$$I(s, N, \varepsilon) = \int_0^{\infty} x^s \exp(-N(1 - \cos x) - \varepsilon x) dx$$

Задача 5 Найти асимптотическое поведение интеграла при $\alpha \ll 1$:

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(x)} dx$$

где $f(x)$ задана неявно уравнением

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 + \alpha \cdot f(x)^4}}$$

Задача 6 Найти асимптотическое поведение интеграла из задачи 3 при $N \gg 1$ и $\alpha > 1$, но $\alpha - 1 \ll 1$:

$$I(N) = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(-N(\cosh x + \cosh y + \alpha xy)) dx \cdot dy$$

4 Интегралы, зависящие от параметра

4.1 Бета-функция Эйлера

Порой приходится иметь дело с интегралами вида:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

или интегралами, которые сводятся к интегралам такого вида подстановкой. Это — так называемый бета-интеграл Эйлера или просто бета-функция. Этот интеграл удобно выражается через $\Gamma(z)$ — гамма-функцию Эйлера, с которой мы познакомились ранее; это позволяет просто получать значения этого интеграла в различных точках.

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Добавим еще одно полезное свойство гамма-функции (приводим без доказательства):

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

4.2 Задача 1

Вычислим интеграл Френеля:

$$I = \int_0^{\infty} \cos(x^2) \cdot dx$$

Решение Перейдем к переменной интегрирования $t = x^2$. Получим:

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) \cdot dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}} \cdot dt$$

Представим $\frac{1}{\sqrt{t}}$ используя интеграл Пуассона:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx$$

Подстановки такого вида позволяют перейти от одних функций к другим, интегралы с которыми порой взять проще. Мы получаем кратный интеграл, в котором можем поменять порядок интегрирования:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos(t) e^{-tx^2} dx dt$$

Теперь возьмем интеграл по t . Для этого разберемся со вспомогательным интегралом:

$$\begin{aligned} J(a) &= \int_0^{\infty} \cos(t) e^{-at} dt = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-at+it} dt = \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{a-i} = \frac{a}{a^2+1} \end{aligned}$$

Для исходного интеграла $a = x^2$, поэтому получаем:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

Приведём два способа взятия этого интеграла.

“Правильный” способ Этот интеграл можно взять стандартными методами (разбиением на элементарные дроби). Однако способ получается громоздким, поэтому воспользуемся другим методом. Во-первых, заметим, что если сделать в этом интеграле замену $t = \frac{1}{x}$, то получим:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^0 \left(-\frac{dt}{t^2}\right) \frac{1/t^2}{1+1/t^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^4} dt$$

Это позволит представить интеграл в виде:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$$

Теперь можно перейти к стандартной переменной для интегрирования симметрических многочленов $t = x - \frac{1}{x}$; при этом $dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$, получим:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

“Главный” способ Очень полезно научиться сводить такие интегралы к B -функции, о которой было рассказано выше. Перейдем в этом интеграле к переменной $t = \frac{1}{1+x^4} \Rightarrow x = \left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/4} \Rightarrow dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1-t}{t}\right)^{-3/4} \left(-\frac{dt}{t^2}\right)$. Имеем:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^0 \left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/2} t \frac{1}{4} \left(\frac{1-t}{t}\right)^{-3/4} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^1 t^{-3/4} (1-t)^{-1/4} dt = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Используя приведенные выше свойства бета-функции, получаем:

$$B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}$$

$$I = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \pi\sqrt{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Как ни странно, ответ получился таким же.

Замечание Заметим, что этот же ответ можно было получить гораздо проще, используя трюк с комплексными переменными и комплексным интегралом Пуассона. Нужно лишь обратить внимание на тонкость, связанную с тем, что $\sqrt{i} = \pm e^{i\pi/4}$, и необходимо выбрать правильный знак.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\pi}{i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{Re}(e^{-i\pi/4}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

4.3 Задача 2

Возьмём интеграл:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx$$

Решение Заметим, что без логарифма интеграл легко считается. Если мы продифференцируем интеграл по α , то логарифм заменится на дробь, а интегралы с дробями считать легче:

$$\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \int_0^{\infty} \frac{2\alpha}{(\beta^2 + x^2)(\alpha^2 + x^2)} dx$$

Пусть $\alpha \neq \beta$, тогда верно разложение: $\frac{1}{(\beta^2+x^2)(\alpha^2+x^2)} = \frac{1}{\alpha^2-\beta^2} \left(\frac{1}{\beta^2+x^2} - \frac{1}{\alpha^2+x^2}\right)$; каждый полученный интеграл легко считается:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} &= 2\alpha \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left(\frac{1}{\beta^2 + x^2} - \frac{1}{\alpha^2 + x^2}\right) dx = \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{(\alpha + \beta)\beta} \end{aligned}$$

Тут мы считаем $\alpha > 0, \beta > 0$. Однако при $\alpha = \beta$, эта формула тоже верна:

$$\int_0^{\infty} \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + x^2)^2} dx = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{2\alpha^2}$$

Теперь проинтегрируем полученное выражение по α :

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{\beta} \ln(\alpha + \beta) + C(\beta)$$

Тут постоянная $C(\beta)$ — произвольная функция, которая не зависит от α . Чтобы найти значение этой функции, подставим в исходный интеграл $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} I(0, \beta) &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\beta^2 + x^2} \cdot dx = \left| \begin{array}{l} x = \beta \cdot t \\ dx = \beta \cdot dt \end{array} \right| = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\ln t + \ln \beta}{\beta(1+t^2)} \cdot dt = \frac{\pi \ln \beta}{\beta} + 2 \int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} \cdot dt \end{aligned}$$

Последний интеграл равен нулю, это можно показать сделав замену $t = e^z$ (в силу нечётности полученной подынтегральной функции):

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{1+e^{2z}} e^z \cdot dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{e^{-z} + e^z} \cdot dz = 0$$

Итого $I(0, \beta) = \frac{\pi \ln \beta}{\beta} \Rightarrow C(\beta) = 0$. Формально ответ был получен в предположении $\alpha > 0$ и $\beta > 0$; поскольку исходный интеграл зависит лишь от их квадратов, то ответ в общем виде записывается как:

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|)$$

4.4 Задача 3

Вычислим интегралы Лапласа:

$$\begin{aligned} I_0(a, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2 + a^2} dx \\ I_1(a, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\omega x)}{x^2 + a^2} dx \end{aligned}$$

Решение Перейдем к переменной интегрирования $x = at$; введем обозначение $\omega a = \alpha$, и для определенности далее будем считать, что $\alpha > 0$. Получим:

$$I_0(a, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} J(\alpha)$$

Возьмем производную $J(\alpha)$ по α :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + 1} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\alpha x)}{x^2 + 1} dx$$

Получившийся интеграл сходится, однако производная от него уже расходится. В таком случае используем такой трюк:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \sin(\alpha x)}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{x} = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 1) \sin(\alpha x)}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{x} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{x} = \\ &= -\pi + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Теперь можно вычислять вторую производную, так как получающийся интеграл сходится:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2 + 1} \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2 + a^2} dx = J(\alpha)$$

Мы получили замкнутое дифференциальное уравнение на функцию $J(\alpha)$. Это уравнение линейно и с постоянными коэффициентами, поэтому оно решается с помощью стандартной подстановки $J(\alpha) = e^{\lambda \alpha}$. Такая подстановка приводит к алгебраическому уравнению на λ : $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$; следовательно, общее решение уравнения записывается как $J(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}$. Константа C_1 должна быть положена равной нулю, поскольку сам интеграл, очевидно, ограничен. Константу C_2 можно найти из значения интеграла при $\alpha = 0 \Rightarrow J(0) = \pi$. Значит, наш интеграл записывается как:

$$J(\alpha) = \pi e^{-\alpha}$$

Ответ был получен в предположении $\alpha > 0$. Поскольку исходный интеграл зависит лишь от модулей параметров a и ω , то ответ в общем виде записывается как:

$$I_0(a, \omega) = \frac{\pi}{|a|} e^{-|\alpha \omega|}$$

Тем самым

$$I_1(a, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\alpha x)}{x^2 + 1} dx = -\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \pi e^{-|\omega a|}$$

$$I_2(a, \omega) = \pi e^{-|\omega a|} \cdot \text{sign}(\omega)$$

4.5 Задача 4

Используя экспоненциальную регуляризацию, найти “сумму” ряда из натуральных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

Указание Суть экспоненциальной регуляризации — домножение на $e^{-\varepsilon n}$ и затем рассмотрение поведения функции при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Решение Нам необходимо рассмотреть следующий ряд:

$$S(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\varepsilon n}$$

Этот ряд можно представить как производную по ε от геометрической прогрессии:

$$S(\varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon}}{1 - e^{-\varepsilon}} = \left(\frac{1}{e^{\varepsilon} - 1} \right)^2 e^{\varepsilon}$$

А теперь разложимся по ε , чтобы взять предел $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} S(\varepsilon) &= \left(\frac{1}{1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^3 - 1 + o(\varepsilon^3)} \right)^2 \times \\ &\quad \times \left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \right) = \\ &= \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{6} + o(\varepsilon^3) \right)^{-2} \left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{6} + o(\varepsilon^2) \right)^{-2} \left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{3\varepsilon^2}{4} + o(\varepsilon^2) \right) \left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{5\varepsilon^2}{12} + o(\varepsilon^2) \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{1}{12}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \right) = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{12} + o(1) \end{aligned}$$

Это и есть ответ.

Замечание Дзета-функция Римана при $\text{Re} z > 1$ определяется как сумма ряда:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

Используя экспоненциальную регуляризацию, мы, на самом деле, получили значение $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. Эту функцию можно доопределить (единственным образом) и для $\text{Re} z < 1$ так, чтобы полученная функция получилась аналитической; и значение в $z = -1$ получено именно в смысле аналитического продолжения. Этот результат означает, что в определенном смысле сумма всех натуральных чисел равна $-\frac{1}{12}$.

4.6 Задачи для домашнего решения:

Задача 1 Вычислить интеграл

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} \cdot dx$$

Задача 2 Вычислить интеграл:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot dx$$

Задача 3* При $0 < m < 1$ вычислить интеграл:

$$I(m) = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^m} dx$$

Указание воспользуйтесь трюком, аналогичным задаче 1, а именно, представьте

$$\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt$$

Задачи 4, 5 Функция Бесселя первого рода целого индекса n можно определить как интеграл

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - z \cos \varphi) d\varphi$$

Показать, что она удовлетворяет так называемому уравнению Бесселя:

$$z^2 J_n''(z) + z J_n'(z) + (z^2 - n^2) J_n(z) = 0$$

Также выразить производную функции Бесселя через её же, но, возможно, с другими индексами n .

Задача 6 Точное значение периода колебаний математического маятника можно записать как:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot K\left(\sin \frac{\phi_0}{2}\right)$$

тут ϕ_0 - амплитуда колебаний, а $K(k)$ - так называемый полный эллиптический интеграл, определяемый следующим образом:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 z}}$$

Найти первые два члена разложения периода T по малости амплитуды ϕ_0 .

Задачи 7, 8 Используя размерную регуляризацию и регуляризацию Паули-Вилларса, рассмотрите интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{p^3}{p^2 + h^2} dp$$

5 Интегралы от быстроменяющихся функций. Асимптотические разложения

5.1 Метод стационарной фазы

Часто в приложениях встречаются осциллирующие интегралы типа:

$$\int \cos(f(x)) \cdot dx$$

с очень быстроменяющейся функцией $f(x)$. К таким интегралам часто применим так называемый метод стационарной фазы. Этот метод тесно связан с методом перевала; идея заключается в том, что, как и в методе перевала, поведение интеграла определяется окрестности стационарных точек $f'(x_0) = 0$. Это связано с тем, что именно в окрестности этих точек функция осциллирует медленнее всего; вдали же от них за счёт быстрых осцилляций интеграл быстро сходится. Вклад от каждой стационарной точки можно получить путём разложения функции в ряд Тейлора в окрестности. Получается интеграл

$$\int \cos\left(f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots\right) dx$$

где пределы интегрирования уже можно распространить на всю числовую ось. Такой интеграл мы уже умеем считать, т.к он выражается через уже известные нам интегралы Френеля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

Обсудим теперь применимость метода. Интеграл от разложенной функции набирается в малой окрестности стационарной точки шириной $|x - x_0| \sim \frac{1}{\sqrt{|f''(x_0)|}}$. Чтобы можно было пренебречь вкладом от следующих членов разложения выше второго, требуется выполнение следующих условий:

$$\left|f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3\right| \ll \left|f''(x_0)(x-x_0)^2\right|$$

$$\left|f^{(4)}(x_0)(x-x_0)^4\right| \ll \left|f''(x_0)(x-x_0)^2\right|$$

в области сходимости интеграла. Это дает нам следующие критерии применимости метода:

$$\left|f^{(3)}(x_0)\right| \ll |f''(x_0)|^{3/2}$$

$$|f^{(4)}(x_0)| \ll |f''(x_0)|^2$$

5.2 Задача 1

В качестве примера разберем поведение функции Эйри (Airy function) при $x \rightarrow \infty$

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$$

Решение Найдем стационарные точки фазы:

$$f'(t) = t^2 + x = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \pm |x|^{1/2}$$

Только одна стационарная точка $t_1 = \sqrt{|x|}$ попадает в отрезок интегрирования, и необходимо рассматривать вклад только от ее окрестности. Для поведения фазы в окрестности этой точки можно записать:

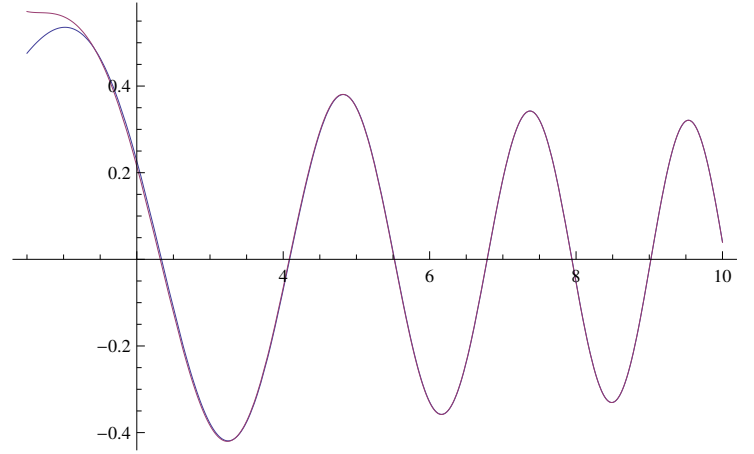
$$f''(t) = 2t \Rightarrow f''(t_1) = 2|x|^{1/2}$$

$$f(t) \approx -\frac{2}{3}|x|^{3/2} + |x|^{1/2} \left(t - |x|^{1/2}\right)^2$$

Поэтому вклад в интеграл от окрестности стационарной точки записывается как:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2} + |x|^{1/2} \left(t - |x|^{1/2}\right)^2\right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) \cos\left(|x|^{1/2} \left(t - |x|^{1/2}\right)^2\right) dx + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) \sin\left(|x|^{1/2} \left(t - |x|^{1/2}\right)^2\right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) + \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) \right] \sqrt{\frac{\pi}{2|x|^{1/2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cdot \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Рис. 6: Функция Эйри и её асимптотика



5.3 Задача 2

Разберем поведение функции Бесселя при $x \rightarrow \infty$

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t) dt$$

Решение Стационарные точки фазы даются условием:

$$f'(t) = x \cos t = 0 \Rightarrow t_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

В отрезок интегрирования попадает одна стационарная точка t_0 ; поведение функции определяется вкладом в интеграл лишь от окрестности этой точки. Имеем:

$$f''(t) = -x \sin t \Rightarrow f''(t_0) = -x$$

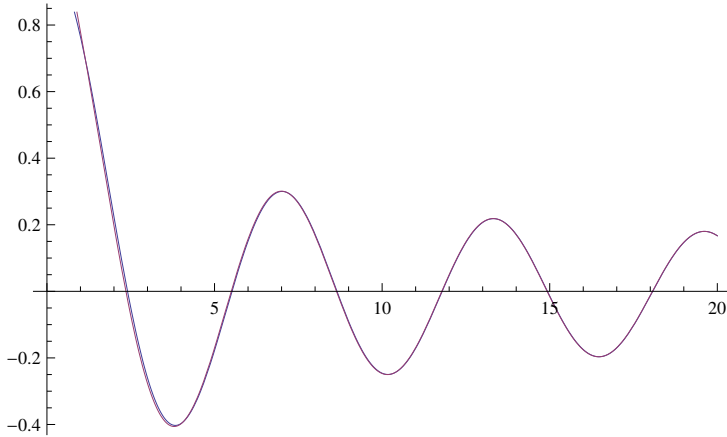
$$f(t) \approx x - \frac{1}{2}x \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

поэтому для оценки асимптотики функции Бесселя полу-

чаем:

$$\begin{aligned} J_0(x) &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left(x - \frac{1}{2}x \left(t - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos x \cdot \cos \left(\frac{1}{2}x \left(t - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right) dx + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \cdot \sin \left(\frac{1}{2}x \left(t - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} (\cos x + \sin x) \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{2x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Рис. 7: Функция Бесселя и её асимптотика



5.4 Задача 3

При $\alpha \rightarrow \infty$ найдём полный асимптотический ряд для интеграла

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x(x+\alpha)}} dx$$

Решение Асимптотический ряд можно просто получить, раскладывая корень по малости $\frac{x}{\alpha}$. Имеем:

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x(x+\alpha)}} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{x}{\alpha} \right)^{-1/2} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_{-1/2}^k \left(\frac{x}{\alpha} \right)^k dx \end{aligned}$$

Тут C_{α}^k при нецелых α — обобщенный биномиальный коэффициент, определяемый как:

$$C_{\alpha}^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)}$$

В случае $\alpha = -\frac{1}{2}$ это можно переписать:

$$C_{-1/2}^k = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-k+\frac{1}{2}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{(2k-1)!!}{k!}$$

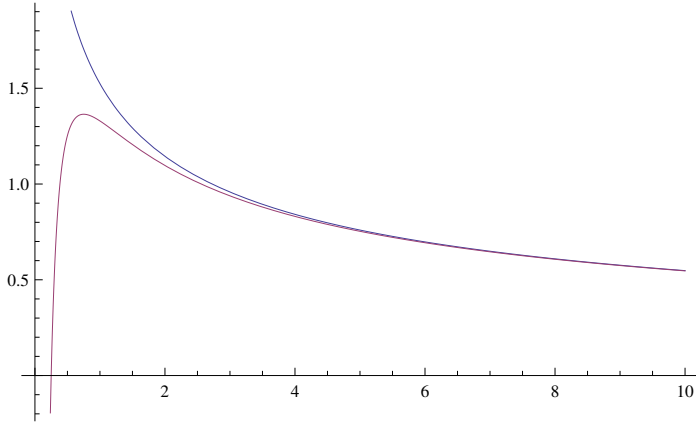
Дальше можно поменять местами сумму и интеграл; каждый из полученных интегралов представляет собой просто интеграл Эйлера; получаем:

$$\begin{aligned} I(a) &\sim \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k} C_{-1/2}^k \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{k-1/2} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{k+1/2}} C_{-1/2}^k \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{k+1/2}} \cdot \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{(2k-1)!!}{k!} \cdot \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{k+1/2}} \cdot \frac{(-1)^k ((2k-1)!!)^2 \sqrt{\pi}}{2^{2k} k!} \end{aligned}$$

Тут мы воспользовались тем, что $\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(k - \frac{3}{2}\right) \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \cdot \sqrt{\pi}$. Для первых нескольких членов разложения имеем:

$$I(a) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(1 - \frac{1}{4\alpha} + \frac{9}{32\alpha^2} + O\left(\frac{1}{\alpha^3}\right) \right)$$

Рис. 8: Точное значение интеграла и первые два члена асимптотического разложения



5.5 Задача 4

Найдём полное асимптотическое разложение интегрального синуса при $x \rightarrow \infty$:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Решение Перепишем выражение следующим образом, используя интеграл Дирихле:

$$\text{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

Можно получить асимптотический ряд, просто интегрируя по частям:

$$\begin{aligned} \text{Si}(x) &= \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} + \int_x^\infty \frac{\cos t}{t^2} dt = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2 \int_x^\infty \frac{\sin t}{t^3} dt \end{aligned}$$

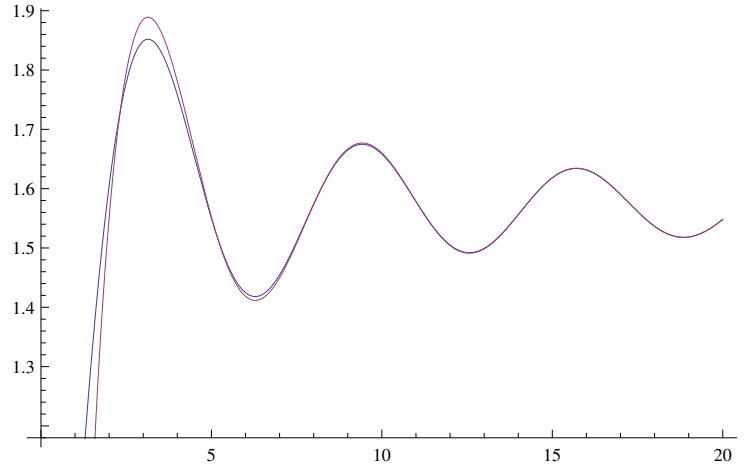
В общем виде мы получаем следующую сумму:

$$\text{Si}(x) \sim \frac{\pi}{2} - \cos x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (2k)!}{x^{2k+1}} - \sin x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!}{x^{2k}}$$

Заметим, что эти ряды расходятся. Первые несколько членов ряда дают:

$$\text{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2 \frac{\cos x}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Рис. 9: Интегральный синус и первое приближение



5.6 Задача 5

Найдём асимптотическое поведение интеграла при $n \rightarrow \infty$

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \cdot dx$$

Решение Для асимптотики можно воспользоваться уже известным нам методом перевала. Действительно, интеграл можно переписать:

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \exp(n \cdot \log(\sin x)) dx$$

Стационарная точка находится из условия

$$f'(x) = \frac{n}{\sin x} (-\cos x) = -n \cdot \cot x = 0 \Rightarrow x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

Лишь одна стационарная точка x_0 попадает в отрезок интегрирования, и поведение интеграла определяется вкладом

от окрестности этой точки.

$$f''(x) = -\frac{n}{\sin^2 x} \Rightarrow f''(x_0) = -n$$

$$f(x) \approx -\frac{1}{2}n \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

Тут имеется тонкость. Стационарная точка попадает ровно на границу отрезка интегрирования. Это означает, что мы не можем распространять интеграл от разложенной функции на всю числовую ось, как мы поступали в методе перевала. Это обходится следующим образом: поскольку в области интегрирования лежит ровно половина Гауссова колокола (а в малой окрестности стационарной точки подынтегральная функция симметрична), то вклад от метода перевала нужно просто поделить на 2. Получаем:

$$f(x) \approx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}n \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Заметим, что интеграл чуть более общего вида

$$I(n, m) = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \cdot \sin^n x \cdot dx$$

можно свести к B -интегралу Эйлера. Действительно, введём замену $t = \sin^2 x$; при этом $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = (1 - t)^{1/2}$ и $dt = 2 \sin x \cos x dx$. Имеем:

$$\begin{aligned} I(n, m) &= \int_0^1 \frac{\cos^m x \sin^n x dt}{2 \sin x \cos x} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} t^{\frac{n-1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \end{aligned}$$

В случае $m = 0$, точный ответ получается:

$$I(n) = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

Для оценки асимптотики этого выражения можно воспользоваться формулой Стирлинга

$$\Gamma(n+1) \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Получаем:

$$\begin{aligned} I(n) &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi(n-1)}}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{n}{2}}}{e^{\frac{n-1}{2}}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{e} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1/2} \cdot e^{\frac{n}{2} \ln(1 - \frac{1}{n})} \cdot \sqrt{e} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot e^{\frac{n}{2} \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right)} \sqrt{e} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{4n}\right) \end{aligned}$$

Этот способ, в отличие от метода перевала, позволил нам получить следующий член асимптотического разложения (с помощью метода перевала получить его не получится).

5.7 Задача 6

Покажем, что функция

$$\delta_\omega(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin^2(\omega x)}{\omega x^2}$$

при $\omega \rightarrow 0$ представляет собой δ -функцию Дирака.

Решение Область, в которой функция существенно отлична от нуля, имеет ширину $|x| \sim \frac{1}{\omega}$, и при $\omega \rightarrow \infty$ она сужается:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_\omega(x \neq 0) = 0$$

Поэтому при рассмотрении интеграла вида

$$I = \int \delta_\omega(x) f(x) dx$$

при $\omega \rightarrow 0$ поведение определяется окрестностью нуля (область интегрирования должна содержать ноль, а функция $f(x)$ не должна иметь сингулярностей в нуле). Получаем:

$$I \approx \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\omega(x) \cdot f(0) \cdot dx = f(0) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega x}{\omega x^2} dx$$

Этот интеграл как раз равен π . Поэтому можно записать:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\omega(x) f(x) dx = f(0)$$

Это и означает по определению, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_\omega(x) = \delta(x)$$

5.8 Задачи для домашнего решения

Задача 1 При $x \rightarrow \infty$ найти асимптотический ряд для интегрального косинуса

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

Задача 2 При фиксированном s и $x \rightarrow \infty$ найти асимптотический ряд для неполной гамма-функции

$$\Gamma(s, x) = \int_x^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

Задача 3 При фиксированном n и $x \gg n^2$ найти асимптотику функции Бесселя целого порядка n , определяемой как

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \sin t) dt$$

Задача 4 При $x \rightarrow \infty$ найти асимптотику интеграла

$$I(x) = \int_0^{\infty} \cos(x \cdot (t^4 - t^2)) dt$$

Задача 5 Вычислить точно интеграл

$$\int_0^b x \cdot e^{-x} \cdot \sin(\omega x) dx$$

Задача 6 Найти значение функции Эйри (см. задачу 1) в нуле $\text{Ai}(0)$.

Задача 7 Найти дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функцию Эйри.

Подсказка это уравнение не содержит производных выше второй.

6 Дифференциальные уравнения

6.1 Однородные линейные дифференциальные уравнения

Линейными дифференциальными уравнениями называются уравнения вида:

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) \cdot y^{(k)}(x) = 0$$

Такие уравнения называются линейными, поскольку если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения этого уравнения, то их общая линейная комбинация $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ также является решением этого уравнения; решения этого уравнения образуют линейное пространство. Таким образом, чтобы задать общее решение этого уравнения, необходимо найти все (как правило, их количество совпадает с порядком дифференциального уравнения n) линейно-независимые решения.

6.2 Задача 1 (разложение в ряд)

Часто решение линейного дифференциального уравнения можно найти в виде разложения в ряд по степеням x . Проиллюстрируем это на примере — найдём решение дифференциального уравнения Бесселя

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + y(x) = 0$$

в виде разложения $y(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$

Решение Подставляя $y(x)$ в нужном виде в уравнение, мы получаем:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot a_k x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-2} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$x^{-1} : a_1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$x^{k-2} : k(k-1) a_k + k \cdot a_k + a_{k-2} = 0 \Rightarrow a_k = -\frac{1}{k^2} \cdot a_{k-2}$$

Решая это рекуррентное соотношение, получаем:

$$a_{2k-1} \equiv 0$$

$$a_{2k} = \frac{-1}{(2k)^2} \cdot \frac{-1}{(2(k-1))^2} \cdots \frac{-1}{2^2} \cdot (-1) = \frac{(-1)^k}{2^{2k} \cdot (k!)^2}$$

$$y(x) \equiv J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

6.3 Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Если $a_k(x) = \text{const}$, то говорят, что имеет место уравнение с постоянными коэффициентами. Подстановкой $y = \exp(\lambda \cdot x)$, это уравнение сводится к алгебраическому уравнению на λ :

$$P(\lambda) \equiv \sum_{k=0}^n \lambda^k a_k = 0$$

$P(\lambda)$ называется характеристическим многочленом этого дифференциального уравнения. В силу основной теоремы арифметики и теоремы Безу, этот многочлен всегда можно представить в виде $P(\lambda) = a_n (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$, где λ_k — (возможно комплексные) решения уравнения $P(\lambda) = 0$.

Невырожденный случай Если все λ_k , $k = 1 \dots n$ различны, то говорят, что имеет место невырожденный случай. В таком случае каждой λ_k соответствует ровно 1 решение исходного уравнения $y_k(x) = e^{\lambda_k x}$; общее решение (в силу линейности уравнения) записывается как

$$y(x) = \sum_{k=1}^n C_k \cdot e^{\lambda_k x}$$

где C_k — произвольные константы.

Вырожденный случай Может случиться, что какое-то число λ повторяется m раз (говорят, что λ — корень кратности m уравнения $P(\lambda) = 0$). В таком случае оказывается, что можно тоже построить m линейно-независимых решений в виде $y_k(x) = x^k e^{\lambda x}$, $k = 0 \dots m - 1$.

Общий случай В общем случае имеется разложение

$$P(\lambda) = a_0 (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

где $m_1 + \dots + m_p \equiv n$; все λ_k различны и m_k — кратность λ_k как корня. В этом случае, обобщая предыдущие 2 пункта,

общее решение запишется как:

$$y(x) = \sum_{k=1}^p e^{\lambda_k x} \sum_{i=0}^{m_k-1} C_{ki} x^i =$$

$$= e^{\lambda_1 x} (C_{10} + C_{11}x + \dots + C_{1m_1} x^{m_1-1}) + \dots$$

$$+ e^{\lambda_p x} (C_{p0} + C_{p1}x + \dots + C_{pm_p} x^{m_p-1})$$

где C_{ki} — произвольные константы; их количество ровно $m_1 + \dots + m_p \equiv n$, как и должно быть.

6.4 Задача 2

Найдём общее решение дифференциального уравнения

$$y^{(4)} + 6y^{(3)} + 13y'' + 12y' + 4y = 0$$

Решение Следуя алгоритму решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, составим характеристических многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 13\lambda^2 + 12\lambda + 4$$

Несложно видеть, $\lambda = -1$ и $\lambda = -2$ являются корнями кратности 2 этого многочлена:

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)^2 (\lambda + 2)^2$$

Следовательно, общее решение записывается как:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + (C_3 + C_4 x) e^{-2x}$$

6.5 Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Неоднородными уравнениями называются уравнения с ненулевой правой частью:

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot y^{(k)}(x) = f(x)$$

Во-первых, в силу линейности, если $y_1(x)$ удовлетворяет уравнению с правой частью $f_1(x)$, а $y_2(x)$ — с $f_2(x)$, то $y_1(x) + y_2(x)$ будет удовлетворять уравнению с правой частью $f_1(x) + f_2(x)$. В силу этого, общее решение неоднородного уравнения будет представлять собой сумму общего решения однородного (с нулевой правой частью) и частного решения с заданной правой частью.

Далее удобно рассмотреть несколько наиболее интересных частных случаев вида правой части.

Полином Если правая часть имеет вид $f(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$, то решение уравнения стоит искать тоже в виде некоторого полинома, степень которого совпадает с n (это несложно увидеть, если проследить за максимальной степенью в левой части уравнения и в правой)

$$y(x) = \sum_{k=0}^n C_k x^k$$

Подстановка такой функции даст ровно $n+1$ линейное уравнение на коэффициенты C_k , откуда их можно будет однозначно выразить.

Экспонента (а также \sin, \cos) Правая часть имеет вид $f(x) = e^{\lambda x}$. Тут тоже может быть случай резонанса, а именно: если λ — корень характеристического многочлена кратности m , то искать решение стоит в виде $Cx^m e^{\lambda x}$; если же λ не является корнем — то решение стоит искать в виде $Ce^{\lambda x}$.

6.6 Задача 3

Решим дифференциальное уравнение

$$y'' - y = e^x \cos x + e^x$$

Решение

Однородное Сперва найдём общее решение однородного уравнения:

$$y_0''(x) - y_0(x) = 0$$

Запишем характеристический многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Отсюда видно, что общее решение записывается как:

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Теперь перепишем правую часть в виде

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{(1+i)x} + \frac{1}{2} e^{(1-i)x} + e^x$$

Неоднородное с правой частью $f_1(x) = \frac{1}{2} e^{(1+i)x} + \frac{1}{2} e^{(1-i)x}$ Ни $1+i$, ни $1-i$ не являются корнями характеристического многочлена. Поэтому, следуя общей схеме, будем искать решение в виде:

$$y_1(x) = \tilde{C}_1 e^{(1+i)x} + \tilde{C}_2 e^{(1-i)x}$$

Однако, поскольку нас, как правило, интересуют лишь вещественные решения, то можно сделать замену констант и искать решение в виде:

$$y_1(x) = C_1 e^x \sin x + C_2 e^x \cos x$$

Подстановка такой функции в уравнение даёт нам:

$$y_1'(x) = (C_1 - C_2) e^x \sin x + (C_2 + C_1) e^x \cos x$$

$$y_1''(x) = 2C_1 e^x \cos x - 2C_2 e^x \sin x$$

$$(2C_1 - C_2) e^x \cos x + (C_1 + 2C_2) e^x \sin x = e^x \cos x$$

$$\begin{cases} 2C_1 - C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{2}{5} \\ C_2 = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$y_1(x) = \frac{2}{5} e^x \sin x - \frac{1}{5} e^x \cos x$$

Неоднородное с правой частью $f_2(x) = e^x$ Число $\lambda = 1$ является корнем характеристического многочлена кратности 1, поэтому решение ищем в виде:

$$y_2(x) = C \cdot x \cdot e^x$$

Подстановка в уравнение даёт нам:

$$y_2'(x) = C(x+1)e^x$$

$$y_2''(x) = C(x+2)e^x$$

$$2Ce^x = e^x \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2} x e^x$$

Таким образом, общее решение записывается как:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{2}{5} e^x \sin x - \frac{1}{5} e^x \cos x + \frac{1}{2} x e^x$$

6.7 Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называются уравнения, которые приводятся к виду:

$$g(y) dy = f(x) dx$$

Решение таких уравнений получается просто интегрированием левой и правой части.

6.8 Задача 4

Рассмотрим классическое дифференциальное уравнение движения математического маятника ($\omega^2 = \frac{g}{l}$):

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin \varphi$$

Если из положения равновесия маятнику придать необходимую начальную скорость, конечное положение маятника может оказаться точно перевёрнутым. Найдём такое решение.

Решение Для такого уравнения можно записать некую сохраняющуюся величину $I[\varphi(t)]$ (так называемый “первым интегралом”; он может зависеть как от φ в некий момент времени, так и от производных). Сохранение этой величины означает, что для любого $\varphi(t)$ — решения уравнения, будет выполнено $\frac{d}{dt} I[\varphi(t)] \equiv 0$. В данном случае, выражение для первого интеграла можно написать из физических соображений — известно, что для консервативных систем имеется закон сохранения энергии; в нашем случае его можно записать как:

$$I[\varphi(t)] = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \varphi$$

Действительно:

$$\frac{d}{dt} I[\varphi(t)] = \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = \dot{\varphi} (\dot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi) \equiv 0$$

При помощи первых интегралов можно понижать степень уравнения. Действительно, если величина I — сохраняется, то мы можем просто записать уравнение уже первого порядка:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{2(I + \omega^2 \cos \varphi)}$$

Мы получили уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2(I + \omega^2 \cos \varphi)}} = dt$$

Если теперь проинтегрировать полученное тождество и разрешить его, выразив $\varphi(t)$, мы полностью решим задачу в общем виде. Однако, в общем случае интеграл в левой части не выражается через элементарные функции; для таких интегралов введен целый класс специальных функций, называемые эллиптическими функциями.

В случае малых φ его можно взять приближённо, заменив $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$; полученный ответ будет ни чем иным как гармоническим решением $\sin(\omega t + \varphi_0)$.

Нас такое разложение не устраивает, поскольку нас интересует решение, которое в некий момент времени достигает большого угла $\varphi(\dots) = \pi$ (при этом мы хотим, чтобы маятник остановился, то есть $\dot{\varphi}(\dots) = 0$). Оказывается, что интеграл можно взять точно и для этого частного случая. Действительно, значение “энергии” для такого решения будет равно

$$I = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2(t_0) - \omega^2 \cos \varphi(t_0) = \omega^2$$

Это значит, что интеграл записывается как:

$$\int_0^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\omega^2(1 + \cos \varphi)}} = t$$

Универсальная тригонометрическая подстановка $z = \tan \frac{\varphi}{2}$ даёт нам:

$$\omega t = \int_0^{\tan(\frac{1}{2}\varphi(t))} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

Подстановкой $z = \sinh u$ этот интеграл получается:

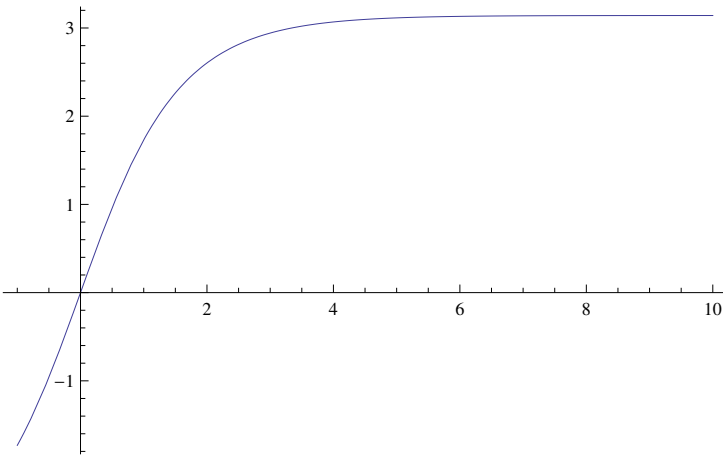
$$\omega t = \operatorname{arcsinh} \left(\tan \left(\frac{1}{2} \varphi(t) \right) \right)$$

откуда, выражая $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = 2 \arctan(\sinh(\omega t))$$

Во-первых, для того, чтобы маятнику “добраться” до точки $\varphi = \pi$, ему требуется бесконечное время (он лишь асимптотически приближается к этому значению). В обратную сторону это означает, что из вертикального положения маятник будет падать вечно. Этот ответ сам по себе не очень интересен (ведь $\varphi = \pi$ — тоже положение равновесия системы); однако интересным является тот результат, что если маятник отклонить на очень малый угол $\delta\varphi \ll 1$, то падать он будет логарифмически долго: $\omega_0 T \sim \ln \frac{1}{\delta\varphi}$.

Рис. 10: Решение $\varphi(t)$



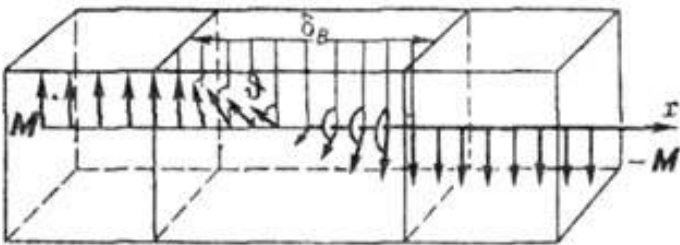
6.9 Задачи для домашнего решения

Задача 1 Найти разложение в ряд по x функции Бесселя $J_m(x)$ целого порядка m , определяемой как решение дифференциального уравнения

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) \cdot y(x) = 0$$

Задача 2 (доменная стенка Блоха) В классическом ферромагнетике намагниченность каждой “точки” постоянна, а меняется лишь её направление (имеются “вращающиеся стрелочки” в каждой точке). Также известно, что в ферромагнетиках, как правило, устанавливается доменная структура — имеются большие области, в которых “стрелочки” смотрят преимущественно в одном направлении.

Рис. 11: Доменная стенка



В одномерном случае зависимость угла от координаты

$\theta(x)$ определяется дифференциальным уравнением:

$$A\theta''(x) + K \sin(\theta(x)) \cos(\theta(x)) = 0$$

Предлагается определить такую зависимость для “доменной стенки”, что соответствует граничным условиям $\theta(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$ и $\theta'(\pm\infty) = 0$.

Задача 3 Найти по определению матричную экспоненту e^A для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 4 (осциллятор с трением) Найти решение дифференциального уравнения, описывающее грузик на пружинке с трением ($\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}$):

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = 0$$

с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, в случае большого затухания $\gamma \gg \omega_0$; найти максимальное отклонение такого осциллятора от положения равновесия.

Задача 5 Для задачи про маятник, оценить время падения маятника вниз, если изначально его отклонили на малый угол $\delta\varphi \ll 1$ от положения “вертикально вверх”.

7 Кратные и криволинейные интегралы

7.1 Задача 1 (закон Ньютона)

Найдём энергию гравитационного взаимодействия шара массы M радиуса r и точечной частицы массы m , которая находится на расстоянии $R > r$ от него.

Решение Результат известен из курса общей физики; эта энергия совпадает с энергией взаимодействия двух точечных частиц: $E = G\frac{Mm}{R}$ (G — гравитационная постоянная). Получим этот результат непосредственным вычислением. Из закона притяжения следует, что энергия выражается в виде следующего интеграла по шару:

$$E = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho m}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3\mathbf{r}$$

вектор \mathbf{R} направлен на точечную массу, $\rho = \frac{3M}{4\pi r^3}$ — плотность, а область интегрирования Ω представляет собой шар. Введем систему координат — поместим шар в начало координат; ось Oz направим на частицу, так что её координаты $\mathbf{R} = (0; 0; R)$. Запишем этот интеграл в сферических координатах: $d^3\mathbf{r} = \rho^2 \cdot d\rho \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$, причём вектор $\mathbf{r} = (r \sin\theta \cos\varphi; r \sin\theta \sin\varphi; r \cos\theta)$. Получаем:

$$E = G \frac{3Mm}{4\pi r^3} \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{(R - \rho \cos\theta)^2 + \rho^2 \sin^2\theta}}$$

Интеграл по φ даёт просто 2π ; раскрывая скобки в знаменателе, получаем:

$$E = G \frac{3Mm}{2r^3} \cdot \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^\pi \frac{\sin\theta \cdot d\theta}{\sqrt{R^2 - 2R\rho \cos\theta + \rho^2}}$$

Сделаем замену во внешнем интеграле $z = -\cos\theta$:

$$E = G \frac{3Mm}{2r^3} \int_0^r \rho^2 d\rho \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + 2R\rho \cdot z}}$$

Этот интеграл можно взять:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2R\rho} \int_{-1}^1 \frac{d(R^2 + \rho^2 + 2R\rho \cdot z)}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + 2R\rho \cdot z}} &= \\ = \frac{1}{R\rho} \left(\sqrt{R^2 + \rho^2 + 2R\rho} - \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho} \right) &= \\ = \frac{1}{R\rho} (R + \rho - |R - \rho|) \end{aligned}$$

Поскольку $R > \rho$, то этот интеграл равен $\frac{2}{R}$. Получаем:

$$E = G \frac{3Mm}{2r^3} \frac{2}{R} \int_0^r \rho^2 d\rho = G \frac{3Mm}{r^3} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{r^3}{3} = G \frac{Mm}{R}$$

7.2 Задача 2

Найдём момент инерции тора большого радиуса R и малого радиуса r относительно оси, перпендикулярной “плоскости тора”.

Решение Введём координаты на торе:

$$\begin{cases} x = (R + \rho \cos\theta) \cos\varphi \\ y = (R + \rho \cos\theta) \sin\varphi \\ z = \rho \sin\theta \end{cases}$$

При этом $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; 2\pi]$, $\rho \in [0; r]$. Найдём якобиан перехода к таким координатам:

$$\begin{aligned} J &= \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \\ &= \det \begin{vmatrix} \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & \sin\theta \\ -(R + \rho \cos\theta) \sin\varphi & (R + \rho \cos\theta) \cos\varphi & 0 \\ -\rho \sin\theta \cos\varphi & -\rho \sin\theta \sin\varphi & \rho \cos\theta \end{vmatrix} = \\ &= (R + \rho \cos\theta) \cdot \rho \end{aligned}$$

Посчитаем объём тора Ω :

$$V = \iiint_{\Omega} d^3\bar{r} = \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \cdot (R + \rho \cos\theta) = \pi r^2 \times 2\pi R$$

поэтому плотность тора равна $\frac{M}{\pi r^2 \times 2\pi R}$. Момент инерции тора выражается через:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) d^3\bar{r} &= \\ = \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta (R + \rho \cos\theta) \cdot (R + \rho \cos\theta)^2 &= \\ = 2\pi \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (R + \rho \cos\theta)^3 &= \\ = 2\pi \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \{ R^3 + 3R^2 \rho \cos\theta + 3R\rho^2 \cos^2\theta + \rho^3 \cos^3\theta \} \end{aligned}$$

Понизим степень $\cos\theta$; поскольку интеграл по θ — по полному периоду, то все интегралы от $\cos n\theta$ зануляются. Остаётся:

$$\begin{aligned}
 I_z &= \frac{2M}{r^2} \int_0^r \rho d\rho \cdot \left(R^2 + \frac{3}{2} \rho^2 \right) = \\
 &= \frac{2M}{r^2} \left(R^2 \frac{r^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{r^4}{4} \right) = \\
 &= M \left(R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right)
 \end{aligned}$$

7.3 Задача 3

Найдём площадь σ_D единичной сферы в D -мерном пространстве.

Решение Рассмотрим D -мерный Гауссов интеграл:

$$I = \int_{\mathbb{R}^D} \exp(-\mathbf{x}^2) d^D \mathbf{x}$$

С одной стороны, если рассмотреть его в D -мерных декартовых координатах, мы получим:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_D \exp(-(x_1^2 + \dots + x_D^2)) = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_D^2} dx_D = \\
 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^D = \pi^{D/2}
 \end{aligned}$$

С другой стороны, мы можем его же рассмотреть в D -мерных сферических координатах. Поскольку подынтегральная функция зависит лишь от расстояния до центра, то мы можем сразу взять интеграл по всем углам; несложно заметить, что полученный интеграл даст нам как раз площадь единичной сферы в D -мерном пространстве (например, в трёхмерье d^3x заменится на $4\pi x^2 dx$, и 4π — как раз площадь единичной сферы в трёхмерье). Таким образом, мы можем записать:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sigma_D x^{D-1} dx$$

Как мы уже знаем, этот интеграл выражается через Γ -функцию Эйлера. Сделаем замену $t = x^2$, получим:

$$I = \sigma_D \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{D-1}{2}} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \sigma_D \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{D}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \sigma_D \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)$$

Таким образом, приравнивая два выражения одного и того же интеграла, мы получим:

$$\sigma_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}$$

$$\sigma_{2n} = \frac{2\pi^n}{(n-1)!}$$

$$\sigma_{2n-1} = \frac{2\pi^{n-\frac{1}{2}}}{\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\dots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^n \pi^{n-1}}{(2n-3)!!}$$

Несколько частных случаев:

$$\begin{cases}
 \sigma_1 &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 \\
 \sigma_2 &= \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi \\
 \sigma_3 &= \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 4\pi \\
 \sigma_4 &= \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2
 \end{cases}$$

Мы видим, что известные нам результаты (для $D = 1, 2, 3$) воспроизводятся.

Комментарий про размерную регуляризацию Аналитичность полученного результата как функции параметра D позволяет рассматривать такие, на первый взгляд абсурдные вещи, как “площадь сферы в пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$ ”, при нецелых ϵ . На этом основан один из способов регуляризации расходящихся интегралов — так называемая “размерная регуляризация”, о которой рассказывалось ранее.

Допустим, нас интересует интеграл в пространстве размерности $D = 4$, и он расходится. Тогда можно формально доопределить D -мерный интеграл на нецелые D , как замену $d^D \mathbf{x}$ на $\sigma_D x^{D-1} dx$; и при этом может оказаться, что интеграл сходится при любых $D < 4$. Это позволяет формально рассмотреть интеграл в пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$ (где интеграл сходится), а затем устремить $\epsilon \rightarrow 0$.

7.4 Задача 4

Пусть C — замкнутая кривая, соответствующая обходу единичной окружности против часовой стрелки. Найдём значение интеграла

$$I = \oint_C \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2 + y^2}$$

Решение

Неправильный способ Функция под интегралом является полным дифференциалом. Действительно:

$$d\left(\arctan \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2} = \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2 + y^2} \quad I = \frac{1}{4\pi^2} \iint \frac{1 - \cos(x+y)}{2 - \cos x - \cos y} dx dy$$

поэтому, казалось бы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, достаточно взять разницу первообразной на концах контура C . Поскольку контур замкнут, то эта разница тождественно равна нулю.

Однако такой способ рассуждений ошибочен, что связано с неаналитичностью “первообразной” в точках $x = 0$ (и неаналитичностью подынтегральной функции в начале координат).

Этот интеграл играет важнейшую роль в теории вычетов (теория функций комплексного переменного).

Правильный способ Поступим по определению. Запараметризуем контур C как $C = \{\bar{r}(\varphi), \varphi \in [0; 2\pi]\}$, причём $x(\varphi) = \cos \varphi$ и $y(\varphi) = \sin \varphi$. В таком случае интеграл запишется как:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi + \sin \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi}{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \neq 0$$

7.5 Задачи для домашнего решения

Задача 1 Найти энергию взаимодействия точечной массы m с однородным шаром массы M и радиуса R , если расстояние от центра шара до точечной массы $r < R$.

Задача 2 Найти момент инерции тора из задачи 2 относительно оси, лежащей в “плоскости тора”.

Задача 3 Найти интеграл по единичной сфере

$$I = \iint_{|\mathbf{r}|=1} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^2 \Omega_{\mathbf{r}}$$

(где $d\Omega_{\mathbf{r}}$ означает элемент площади поверхности)

Задача 4 Частица переходит с северного полюса сферы на южный за время T по закону $\theta = \pi \frac{t}{T}$ и $\phi = 2\pi \frac{t}{T}$. Найти длину пройденной траектории.

Задача 5* Найти значение интеграла

где интегрирование происходит по квадрату $x \in [0; 2\pi]$ и $y \in [0; 2\pi]$.

Подсказка задачу удобней решать, если повернуть систему координат, перейдя к переменным $x + y$ и $x - y$.

8 Вариационные задачи

8.1 Общая теория

Вариационные задачи, возникающие чаще всего в приложениях, сводятся к минимизации функционала (назовём его “действием”):

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

где $L(x, \dot{x}, t)$ — некая функция трех переменных (ее мы назовём “лагранжианом”). Этот функционал каждой функции $x(t)$ ставит в соответствие некое число; и вариационная задача заключается в отыскании такой функции $x(t)$, чтобы действие на ней было минимальным.

Известно, что если имеется обычная функция одного переменного $f(x)$, достигающая минимума в точке $x = x_{min}$, и если мы разложимся до линейного члена по $\delta x = x - x_{min}$, то этот линейный член должен занулиться. В случае функции это записывается как:

$$f(x) - f(x_{min}) \approx f'(x_{min}) \cdot \delta x = 0 \Rightarrow f'(x_{min}) = 0$$

Аналогичное соображение можно применить и к случаю функционала. Пусть $x_{min}(t)$ — функция, на которой достигается минимум функционала $S[x(t)]$. Рассмотрим значение функционала на функции $x(t) = x_{min}(t) + \delta x(t)$ и разложимся до линейных по $\delta x(t)$ членов (при этом функция $\delta x(t)$ называется вариацией аргумента, а линейное разложение $\delta S \approx S[x_{min}(t) + \delta x(t)] - S[x_{min}(t)]$ — вариацией функционала). Получаем:

$$\begin{aligned} \delta S &= S[x_{min}(t) + \delta x(t)] - S[x_{min}(t)] \approx \\ &\approx \int_{t_1}^{t_2} \left(L(x_{min}(t) + \delta x(t), \dot{x}_{min}(t) + \delta \dot{x}(t), t) - \right. \\ &\quad \left. - L(x_{min}(t), \dot{x}_{min}(t), t) \right) dt \end{aligned}$$

Лагранжиан $L(x, \dot{x}, t)$ — уже обычная функция многих переменных, которую можно раскладывать в ряд. Получаем:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \cdot \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) \right) dt$$

Второе слагаемое можно проинтегрировать по частям. Для того, чтобы не рассматривать внеинтегральный член, добавим к нашей вариационной задаче так называемое условие закреплённых концов, а именно: функционал минимизируется на таких функциях $x(t)$, что $x(t_1) \equiv x_1$ и $x(t_2) \equiv x_2$ (значения на краях фиксированы). Это значит, что вариация $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, поэтому внеинтегрального члена не будет. Получаем:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x(t) dt$$

Требование $f'(x_{min}) = 0$ в нашем случае заменяется на требование равенства нулю так называемой вариационной производной:

$$\frac{\delta S}{\delta x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

Это — дифференциальное уравнение. Таким образом, мы свели задачу о минимизации функционала к задаче решения обыкновенного дифференциального уравнения. Это уравнение (для действия $S[x(t)]$ и лагранжиана $L(x, \dot{x}, t)$) называется уравнением Эйлера-Лагранжа.

8.2 Геометрическая оптика

Для геометрической оптики имеется принцип Ферма, который гласит: свет движется по траектории, на которой время распространения его минимально.

В случае постоянного показателя преломления, это просто сводится к тому, что свет движется по прямой линии. Однако, пусть теперь показатель преломления как-то меняется в пространстве $n(\mathbf{r})$. В этом случае, скорость света в среде записывается как $v(\mathbf{r}) = \frac{c}{n(\mathbf{r})}$. Пусть теперь свет “движется” по траектории $\bar{\mathbf{r}}(t)$. Для времени распространения можно записать:

$$T = \frac{1}{c} \int n(\mathbf{r}(t)) \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$$

Это значит, что траектория распространения луча соответствует минимизации функционала (“действия”, играющего роль времени):

$$S[\mathbf{r}(t)] = \int n(\mathbf{r}(t)) \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$$

Этот функционал — ровно такого вида, как мы рассматривали; “лагранжиан” для него записывается как (в трёхмерье):

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \equiv n(\mathbf{r}) \cdot |\dot{\mathbf{r}}| = n(x, y, z) \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

В случае многих координат необходимо писать систему уравнений Эйлера-Лагранжа на каждую из координат, то есть:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \end{cases}$$

8.3 Задача 1

Пусть теперь свет распространяется в среде с переменным показателем преломления, с зависимостью:

$$n(x, y) = n_0 - \beta xy$$

причём параметр β мал. Исследуем траекторию, по которой луч будет двигаться из точки $(0; 0)$ в точку $(x_0; 0)$.

Решение Пусть свет распространяется по траектории $y(x)$. Перепишем “действие” на такой траектории в виде:

$$S[y(x)] = \int_0^{x_0} n(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

Обезразмерим задачу. Введём безразмерный $\tilde{x} = \frac{x}{x_0}$ и $\tilde{y} = \frac{y}{x_0}$. В таком случае, “действие” переписывается как:

$$S[y(x)] = \int_0^1 (n_0 - \beta x_0^2 \cdot \tilde{x} \cdot \tilde{y}) \sqrt{1 + \tilde{y}'(\tilde{x})^2} \cdot x_0 d\tilde{x}$$

граничные условия переписутся как:

$$\begin{cases} \tilde{y}(0) = 0 \\ \tilde{y}(1) = 0 \end{cases}$$

Введём единственный важный безразмерный параметр нашей задачи $\kappa = \frac{\beta x_0^2}{n_0}$ и обезразмерим задачу (тут и далее знак \sim писаться не будет, но будет подразумеваться):

$$S[y(x)] = n_0 x_0 \int_0^1 (1 - \kappa \cdot x \cdot y) \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$$

Малость β теперь подразумевается в смысле $\kappa \ll 1$. В этом случае отклонения $y(x)$ должны быть маленькими, и мы можем разложить корень. Получаем:

$$S[y(x)] \approx n_0 x_0 \int_0^1 (1 - \kappa \cdot x \cdot y) \left(1 + \frac{1}{2} (y')^2\right) \cdot dx$$

Пробная функция Найдём приближённую траекторию, минимизируя “действие” в классе пробных функций $y_\alpha(x) = \alpha x(1-x)$. Такие решения представляют собой параболы; они, конечно, отличаются от настоящего решения этой задачи. Однако, вариационный принцип позволяет нам найти параболу, которая больше всего “похожа” на точное решение.

В нашем случае, “действие”, в которое мы подставим такое решение, становится функцией параметра α . По этому параметру можно его минимизировать, и найти оптимальное значение α . Получаем:

$$\begin{aligned} S[y_\alpha(x)] &= n_0 x_0 \int_0^1 (1 - \kappa \cdot x \cdot y_\alpha(x)) \left(1 + \frac{1}{2} (y'_\alpha(x))^2\right) \cdot dx = \\ &= n_0 x_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{6} - \frac{\alpha \kappa}{12} - \frac{\alpha^3 \kappa}{120}\right) \end{aligned}$$

Последний член можно выбросить, поскольку он мал. Оставшееся выражение минимизируем по α . Производная этого выражения по α даёт нам:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\kappa}{12} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4} \kappa$$

Это — оптимальная α , соответствующая наиболее “близкой” параболе к точному решению. “Действие” на этой параболе достигает значения (с необходимой точностью).

$$S \approx n_0 x_0 \left(1 - \frac{1}{96} \kappa^2\right)$$

Оптимальное решение (не обезразмеренное) записывается как:

$$y(x) = \frac{1}{4} \frac{\kappa^2}{x_0} x(x_0 - x) = \frac{\beta^2 x_0^3}{4n_0^2} x(x_0 - x)$$

Заодно посчитаем наибольшее отклонение по оси y . Оно достигается в точке $x = \frac{1}{2} x_0$ и равно:

$$y_{max} = \frac{1}{16} \kappa x_0 = \frac{\beta x_0^3}{16n_0}$$

Аналитическое приближенное решение Можно еще дальше разложить лагранжиан:

$$L(x, y, y') \approx 1 - \kappa xy + \frac{1}{2} (y')^2$$

Уравнений Эйлера-Лагранжа для этого случая можно записать:

$$y'' + \kappa \cdot x = 0$$

$$\begin{aligned} y(x) &= x(1-x) \cdot (\alpha x + \beta) = \\ &= (x - x^2)(\alpha x + \beta) = (\alpha - \beta)x^2 - \alpha x^3 + \beta x \end{aligned}$$

$$y''(x) = 2(\alpha - \beta) - 6\alpha x \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ 6\alpha = \kappa \end{cases}$$

Значит, оптимальное решение записывается как:

$$y(x) = \frac{\kappa}{6} \cdot x(1-x)(1+x)$$

$$\begin{aligned} S[y(x)] &\approx n_0 x_0 \int_0^1 \left(1 - \kappa \cdot x \cdot y + \frac{1}{2} (y')^2 \right) dx = \\ &= n_0 x_0 \left(1 - \frac{\kappa^2}{90} \right) \end{aligned}$$

Это выражение можно сравнивать с предыдущим пунктом. Там было получена поправка $-\frac{\kappa^2}{96}$; значит, “действие” на той траектории чуть больше, и эта траектория ближе к истинной. Также можно сравнить максимальное отклонение. Оно достигается при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (приравнивая производную $y'(x) = 0$) и равно:

$$y_{max} = \frac{1}{9\sqrt{3}}\kappa \approx \frac{1}{15.59}\kappa$$

Чтобы вернуться к размерным параметрам, это значение нужно домножить на x_0 . Видно, что и действие, и максимальное отклонения очень близки в случае этих обоих приближений.

Численный анализ Во-первых, мы можем записать уравнения Эйлера-Лагранжа для этого “действия”:

$$L(x, y, y') \approx (1 - \kappa \cdot x \cdot y) \left(1 + \frac{1}{2} (y')^2 \right)$$

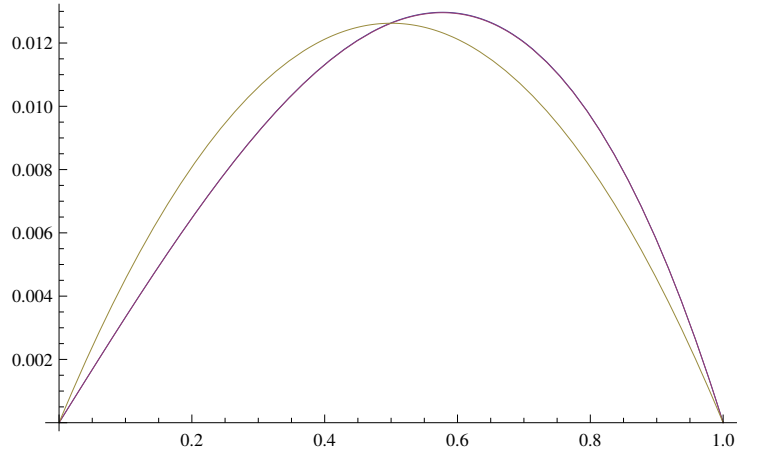
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \Rightarrow -\kappa \cdot y \left(1 + \frac{1}{2} (y')^2 \right) = \frac{d}{dx} [(1 - \kappa \cdot x \cdot y) \cdot y']$$

Это уравнение можно решать численно, в зависимости от параметра κ . Построим все три решения (точное и два приближенных) на одной картинке.

8.4 Статика

Из курса общей физики известно, что в отсутствии движения (статика) система занимает положение, соответствующее минимуму её энергии. Это тоже является вариационным принципом, продемонстрируем это на примере следующей задачи.

Рис. 12: Точное решение и два приближённых



8.5 Задача 2

Пусть имеется цепочка из N точечных масс \tilde{m} , соединённых пружинками жёсткостью \tilde{k} ; пружинки в нерастянутом состоянии имеют длину a . Первый шарик закрепляют в точке $(0; 0)$, а последний — в точке $(x_0; 0)$ (ось y направлена вертикально вверх). Под действием силы тяжести, цепочка провисает. Исследовать это провисание в пределе $N \rightarrow \infty$.

Комментарий Чтобы задача имела конечный предел $N \rightarrow \infty$, параметры задачи тоже нужно менять в зависимости от N . Эта задача является моделью длинной пружинки массы M и жёсткостью k , которая провисает под собственным весом. Если это так, то жёсткости каждой из маленьких пружинок выражаются как $\tilde{k} = k \frac{L}{a} = kN$ (где L — длина большой пружины в нерастянутом состоянии; известно, что чем короче пружинка, тем больше у неё жёсткость, причём $k \sim \frac{1}{l}$); а массы равны $\tilde{m} = M \frac{a}{L} = \frac{M}{N}$.

Решение Потенциальная энергия системы складывается из двух частей. Во-первых, имеется потенциальная энергия в поле тяжести:

$$U_1 = \sum_{n=1}^N \tilde{m}g \cdot y_n$$

а во-вторых, имеется потенциальная энергия каждой из растянутых пружин:

$$U_2 = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2} \tilde{k} \left(\sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} - a \right)^2$$

Запишем теперь эту задачу в пределе $N \rightarrow \infty$. Во-первых, вместо x_n и y_n введём функции $x(l)$ и $y(l)$ так чтобы $x(na) \equiv x_n$ и $y(na) \equiv y_n$; при этом параметр $l \in [0; Na] = [0; L]$. Во-вторых, суммы заменятся на интеграл по правилу $\sum_{n=1}^N \rightarrow \int_0^L \frac{dl}{a}$ (из-за того, что мы заменили $l = na$). В третьих, конечные разности $x_{n+1} - x_n$ и $y_{n+1} - y_n$ свяжем с производными. Таким образом, потенциальная энергия переписется как функционал от функций $x(l)$ и $y(l)$ и будет выражаться как:

$$U_1[x(l), y(l)] = \int_0^L \frac{dl}{a} \cdot M \frac{a}{L} \cdot g \cdot y(l) = \frac{M}{L} g \int_0^L y(l) dl$$

$$U_2[x(l), y(l)] = \int_0^L \frac{kL dl}{2a^2} \left(\sqrt{(x'(l)a)^2 + (y'(l)a)^2} - a \right)^2 = \\ = \frac{1}{2} kL \int_0^L dl \cdot \left(\sqrt{x'(l)^2 + y'(l)^2} - 1 \right)^2$$

$$U[x(l), y(l)] = kL \int_0^L dl \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left(\sqrt{x'(l)^2 + y'(l)^2} - 1 \right)^2 + \frac{Mg}{kL^2} \cdot y(l) \right\}$$

Во-первых, мы избавились от всех бесконечно малых и бесконечно больших; все параметры, входящие в энергию — конечны. Это — признак того, что мы правильно выбрали зависимость параметров исходной задачи от N для воспроизведения непрерывного предела.

Физический смысл $x(l)$ и $y(l)$ можно понять следующим образом. Пусть в какой-то момент гравитацию “выключили”. Очевидно, пружинка будет располагаться в горизонтальном положении и будет равномерно сжата или растянута; при этом $x(l) = l$ и $y(l) = 0$. Затем гравитацию “включили”, и пружинка как-то провисла. Таким образом, $x(l)$ и

$y(l)$ будут координатами той точки, которая исходно находилась в точке $(l; 0)$.

Обезразмерим задачу полностью: заменим $\tilde{x} = \frac{x}{L}$, $\tilde{y} = \frac{y}{L}$, $\tilde{l} = \frac{l}{L}$, $\varkappa = \frac{Mg}{kL}$, $\tilde{U} = \frac{U}{kL^2}$. Далее знак \sim будем опускать.

$$U[x(l), y(l)] = \int_0^1 dl \left\{ \frac{1}{2} \left(\sqrt{x'(l)^2 + y'(l)^2} - 1 \right)^2 + \varkappa y(l) \right\}$$

Необходимо поставить граничные условия. Для нашей задачи они записываются как:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Исследуем систему для $\varkappa \ll 1$, что соответствует сильно жесткой пружине. Провисание мало, поэтому корень можно разложить по $\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx}$:

$$U[x(l), y(l)] \approx \int_0^1 dl \left\{ \frac{1}{2} \left(x' - 1 + \frac{y'(l)^2}{2x'(l)} \right)^2 + \varkappa y(l) \right\}$$

Размерный анализ Получим из соображений размерности характерную высоту провисания пружинки. Пусть пружинка провисла на величину h . Тогда в интеграле можно сделать следующие оценки: $x' \sim 1$, $y \sim -h$, $y' \sim -h$ (напомним, что в обезразмеренной задаче $L = 1$; иначе оценка выглядела бы как $y' \sim -\frac{h}{L}$). Таким образом, потенциальная энергия имеет вид:

$$U \sim (h^4 - \varkappa h)$$

Имеется противоборство двух вкладов: член $\sim \varkappa h$, связанный с силой тяжести, стремится к наибольшему провисанию, в то время как член $\sim h^4$, связанный с упругой энергией, стремится “выровнять” пружинку и минимизировать провисание. Равновесие наступает, когда эти вклады примерно одинаковы, что дает нам размерную оценку на масштаб величины провисания:

$$h^4 \sim \varkappa h \Rightarrow h \sim \sqrt[3]{\varkappa}$$

потенциальная энергия при этом имеет масштаб:

$$U \sim h^4 \sim \varkappa^{4/3}$$

(напомним, что мы работаем в обезразмеренных единицах; в исходной задаче $h \sim L \sqrt[3]{\varkappa}$).

Аналитический подход Запишем уравнения Эйлера-Лагранжа для такого функционала:

$$\begin{cases} \frac{d}{dl} \left(\left(x' - 1 + \frac{y'^2}{2x'} \right) \cdot \left(1 - \frac{y'^2}{2x'^2} \right) \right) = 0 \\ \frac{d}{dl} \left(\left(x' - 1 + \frac{y'^2}{2x'} \right) \cdot \frac{y'}{x'} \right) = \kappa \end{cases}$$

Это — сложные дифференциальные уравнения, и решать мы их не будем. Вместо этого, сделаем еще одно приближение: а именно, положим $x(l) = l$. Если мы вспомним физическую интерпретацию $x(l)$, то увидим, что физически это означает, что мы пренебрегаем горизонтальным смещением шарика при “включении” гравитации; такое приближение кажется разумным: по крайней мере, эти смещения малы. Это приближение приводит функционал к гораздо более простому виду:

$$U[x(l) \equiv l, y(l)] \approx \int_0^1 dl \cdot \left\{ \frac{y'(l)^4}{8} + \kappa \cdot y(l) \right\}$$

Для этой задачи уже можно записать и решить уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dl} \left(\frac{1}{2} y'^3 \right) = \kappa &\Rightarrow y'(l) = \sqrt[3]{2\kappa(l-l_0)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y(l) = (2\kappa)^{1/3} \cdot \frac{3}{4} (l-l_0)^{4/3} + y_0 \end{aligned}$$

Постоянные l_0 и y_0 найдём из граничных условий $y(0) = y(1) = 0$:

$$y_1(l) = \frac{3}{8} \kappa^{1/3} \left\{ (2l-1)^{4/3} - 1 \right\}$$

Из симметрии очевидно, что максимум провисания происходит ровно посередине пружинки, поэтому:

$$h = -y_1 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8} \kappa^{1/3} = 0.375 \kappa^{1/3}$$

Тем самым мы воспроизвели результат, полученный из размерной оценки ($h \sim \kappa^{1/3}$), но теперь мы получили оценку на численный коэффициент. Потенциальная энергия на этом решении равна:

$$\begin{aligned} U[x(l) \equiv l, y(l) \equiv y_1(l)] &\approx \int_0^1 dl \cdot \left\{ \frac{y_1'(l)^4}{8} + \kappa \cdot y_1(l) \right\} = \\ &= -\frac{9}{56} \kappa^{4/3} \approx -0.161 \kappa^{4/3} \end{aligned}$$

Напомним, что U и h — безразмерные; чтобы восстановить размерность, U необходимо домножить на kL^2 , а h — на L .

Пробная функция Кроме того, можно воспользоваться подходом, который мы применяли ранее: рассмотреть решение задачи на классе пробных функций, в качестве которой можно рассмотреть опять параболу. Поскольку она должна удовлетворять граничным условиям $y(0) = y(1) = 0$, то общий вид такой параболы:

$$y(l) = -Al(1-l)$$

Подставляя её в приближенный функционал:

$$U[x(l) \equiv l, y(l)] \approx \int_0^1 dl \cdot \left\{ \frac{y'(l)^4}{8} + \kappa \cdot y(l) \right\} = \frac{A^4}{40} - \frac{A\kappa}{6}$$

Минимум достигается на $A^* = \sqrt[3]{\frac{5}{3}\kappa}$, функция при этом равна

$$y_2(l) = -\sqrt[3]{\frac{5}{3}\kappa} l(1-l)$$

$$h = -y_2 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{5}{3}\kappa} \approx 0.296 \kappa^{1/3}$$

$$U[x(l) \equiv l, y(l) = y_2(l)] \approx -\frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{5}{3}\kappa}^4 \approx -0.148 \kappa^{4/3}$$

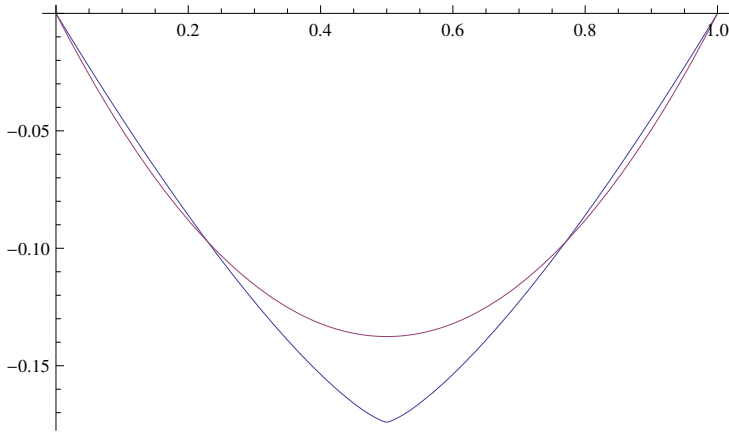
Видно, что энергия в этом случае больше, чем в предыдущем; значит, предыдущее решение лучше.

8.6 Задачи для домашнего решения

Задача 1 Получить наилучшее приближенное решение в задаче 1 этого семинара, используя кубическую пробную функцию.

Задача 2 Исследовать задачу 2 этого семинара в случае, когда длина пружины в нерастянутом состоянии L_0 сильно не совпадает с расстоянием между точками закрепления L . При этом κ по прежнему считать малым.

Рис. 13: Различные приближения к решению



9 Алгебраическая теория возмущений

9.1 Сводка результатов

9.1.1 Обозначения

Линейные операторы мы будем обозначать как \hat{H} , а вектора линейного пространства, в котором этот оператор действует - как $|e\rangle$. Обозначим $\langle e| \equiv (|e\rangle)^\dagger$ (где \dagger - это эрмитово сопряжение; эрмитово сопряжение эквивалентно одновременно транспонированию и комплексному сопряжению). Действие оператора \hat{H} на вектор $|e\rangle$ будем обозначать как $\hat{H}|e\rangle$. В таком случае, скалярное произведение векторов $|a\rangle$ и $|b\rangle$ запишется просто как $\langle a|b\rangle$.

Матричным элементом оператора \hat{H} по векторам $|a\rangle$ и $|b\rangle$ называется просто число $\langle a|\hat{H}|b\rangle$. Часто для удобства его обозначают просто как H_{ab} .

Например, пусть оператор \hat{H} выражается как

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

вектор $|a\rangle$ выражается как:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и вектор $|b\rangle$ выражается как:

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Эрмитово сопряженный вектор:

$$\langle b| \equiv \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}^\dagger = (5 \quad 1 \quad 3)$$

Скалярное произведение:

$$\langle b|a\rangle = (5 \quad 1 \quad 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 + 2 + 0 = 7$$

Действие оператора на вектор:

$$\hat{H}|a\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 10 + 0 \\ 5 + 2 + 0 \\ 4 + 6 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Матричный элемент:

$$\begin{aligned} \langle b|\hat{H}|a\rangle &= (5 \quad 1 \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (5 \quad 1 \quad 3) \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= 55 + 7 + 30 = 92 \end{aligned}$$

Эти обозначения пришли из квантовой механики, в которой чаще всего применяется теория возмущений. Однако, это просто альтернативный способ обозначения объектов, с которыми мы уже умеем работать.

9.1.2 Общие сведения

Говорят, что вектор $|a\rangle$ - собственный вектор для оператора \hat{H} , соответствующий собственному числу λ , если:

$$\hat{H}|a\rangle = \lambda|a\rangle$$

Матрица \hat{H} называется эрмитовой, если $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ (операция эрмитового сопряжения \dagger представляет собой одновременное транспонирование и комплексное сопряжение). Известно, что для любого эрмитового оператора можно выбрать базис пространства, состоящий из его собственных

векторов. Это эквивалентно утверждению о том, что существует базис $\{|n\rangle\}_{n=1}^N$, такой, что матрица \hat{H} , записанная в этом базисе (то есть матрица $H_{nm} = \langle n | \hat{H} | m \rangle$, $n = 1 \dots N$, $m = 1 \dots N$) является диагональной:

$$H_{nm} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

Этот базис можно выбрать ортонормированным, так что:

$$\langle n | m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

9.1.3 Теория возмущений

Постановка задачи Пусть имеется линейный оператор \hat{H}_0 , для которого известен ортонормированный базис $\{|n^{(0)}\rangle\}_{n=1}^N$ из его собственных векторов:

$$\hat{H}_0 |n^{(0)}\rangle = \lambda_n^{(0)} |n^{(0)}\rangle$$

Теория возмущений решает задачу о (приближенном) нахождении собственных векторов и собственных значений матрицы $\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon \hat{V}$, где параметр $\epsilon \ll 1$, в виде разложения по малости параметра ϵ :

$$\hat{H} |n\rangle = \lambda_n |n\rangle$$

при этом

$$\lambda_n = \lambda_n^{(0)} + \epsilon \lambda_n^{(1)} + \epsilon^2 \lambda_n^{(2)} + \dots$$

и аналогично для векторов $|n\rangle$.

Невырожденный случай Если собственное число $\lambda_k^{(0)}$ оказывается невырожденным (это означает, что ему соответствует ровно один из векторов $\{|n^{(0)}\rangle\}_{n=1}^N$), то в первом порядке теории возмущений поправка к нему дается выражением:

$$\lambda_k^{(1)} = V_{kk} \equiv \langle k^{(0)} | \hat{V} | k^{(0)} \rangle$$

а во втором порядке теории возмущений - выражением:

$$\lambda_k^{(2)} = \sum_{n \neq k} \frac{V_{kn} V_{nk}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_n^{(0)}} = \sum_{n \neq k} \frac{|V_{nk}|^2}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_n^{(0)}} = \sum_{n \neq k} \frac{|\langle n | \hat{V} | k \rangle|^2}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_n^{(0)}}$$

Поправки к собственному вектору в первом порядке теории возмущений даются выражением:

$$|n^{(1)}\rangle = \sum_{k \neq n} \frac{V_{nk}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_n^{(0)}} |k^{(0)}\rangle$$

Видно, что если имеется случай, когда $V_{kn} \neq 0$, но $\lambda_k^{(0)} = \lambda_n^{(0)}$, то имеется проблема. Это называется вырождением, и такие случаи нужно рассматривать отдельно.

Вырожденный случай Если же теперь собственное число $\lambda_k^{(0)}$ является s -кратно вырожденным (что означает, что среди набора $\{|n^{(0)}\rangle\}_{n=1}^N$ имеются s различных векторов $\{|n_k^{(0)}\rangle\}_{k=1}^s$), то поступать нужно по-другому. Сперва запишем матрицу \hat{V} в проекции на собственное подпространство из векторов $\{|n_k^{(0)}\rangle\}_{k=1}^s$. Это значит, что нужно рассмотреть матрицу размера $s \times s$, которая записывается как:

$$\begin{aligned} \hat{V} = (V_{n_a n_b})_{a,b=1}^s &= \begin{pmatrix} V_{n_1 n_1} & V_{n_1 n_2} & \dots & V_{n_1 n_s} \\ V_{n_2 n_1} & V_{n_2 n_2} & \dots & V_{n_2 n_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n_s n_1} & V_{n_s n_2} & \dots & V_{n_s n_s} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \langle n_1^{(0)} | \hat{V} | n_1^{(0)} \rangle & \dots & \langle n_1^{(0)} | \hat{V} | n_s^{(0)} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle n_s^{(0)} | \hat{V} | n_1^{(0)} \rangle & \dots & \langle n_s^{(0)} | \hat{V} | n_s^{(0)} \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Затем нужно найти её собственные вектора и значения (что гораздо проще — исходная матрица была размера $N \times N$, а эта матрица - размера $s \times s$; как правило, кратность вырождения s - не очень большое число). Для этого стандартным образом записывается так называемое секулярное уравнение:

$$\begin{aligned} P(\mu) \equiv \det(\hat{V} - \mu) &\equiv \\ &= \det \begin{pmatrix} V_{n_1 n_1} - \mu & V_{n_1 n_2} & \dots & V_{n_1 n_s} \\ V_{n_2 n_1} & V_{n_2 n_2} - \mu & \dots & V_{n_2 n_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n_s n_1} & V_{n_s n_2} & \dots & V_{n_s n_s} - \mu \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

затем находятся s его собственных чисел $\{\mu_k\}_{k=1}^s$ и s его собственных векторов $\{|m_k\rangle\}_{k=1}^s$. Эти вектора, записанные

в исходном базисе, называются “правильными векторами ведущего приближения”. Во-первых, они были выбраны таким образом, что они тоже являются собственными векторами исходного оператора \hat{H}_0 , с собственным числом $\lambda_k^{(0)}$. Поэтому можно перейти от базиса исходных векторов $\left\{ |n_k^{(0)}\rangle \right\}_{k=1}^s$ к базису из $\left\{ |m_k\rangle \right\}_{k=1}^s$.

После такой процедуры, случая, когда $V_{kn} \neq 0$, но $\lambda_k^{(0)} = \lambda_n^{(0)}$ уже не будет. А это значит, что, используя правильные вектора ведущего приближения, можно пользоваться уже обычной невырожденной теорией возмущений.

Заметим, что при этом числа $\{\mu_k\}_{k=1}^s$ (которые являлись собственными числами матрицы \hat{V}) будут играть роль первой поправки $\lambda_k^{(1)}$ к собственному числу $\lambda_k^{(0)}$; кроме того, поскольку этих чисел в общем случае s , и они в общем случае различны, то говорят о снятии вырождения возмущением - число $\lambda_k^{(0)}$ перестаёт быть вырожденным, происходит расщепление.

Замечание Параметр ϵ был введён лишь для того, чтобы аккуратно следить за тем, какой порядок теории возмущений рассматривается. Оказывается, что в k -м порядке теории возмущений, матрица \hat{V} входит ровно k раз (и этот порядок домножается на ϵ^k); это позволяет нам формально положить параметр $\epsilon = 1$ во всех выражениях, и просто считать саму матрицу \hat{V} малой.

9.2 Задача 1

Пусть невозмущенная матрица \hat{H}_0 имеет вид

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

а возмущение имеет вид:

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

(пусть при этом $a \geq b$). Исследуем задачу с матрицей $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} = \begin{pmatrix} a & \epsilon \\ \epsilon & b \end{pmatrix}$

Решение Невозмущенные собственные вектора и собственные значения матрицы \hat{H}_0 записываются тривиально

как:

$$\begin{cases} |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1^{(0)} = a \\ |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_2^{(0)} = b \end{cases}$$

Следуя теории возмущений, первая поправка к собственным числам $\lambda_1^{(0)}$ записываются как:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(1)} = V_{11} = \langle 1 | \hat{V} | 1 \rangle = 0 \\ \lambda_2^{(1)} = V_{22} = \langle 2 | \hat{V} | 2 \rangle = 0 \end{cases}$$

Эти поправки оказались нулевыми, поэтому необходимо исследовать следующий порядок теории возмущений. Он даёт нам:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(2)} = \sum_{k \neq 1} \frac{|V_{k1}|^2}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} = \frac{|V_{21}|^2}{a-b} = \frac{\epsilon^2}{a-b} \\ \lambda_2^{(2)} = \sum_{k \neq 2} \frac{|V_{k2}|^2}{\lambda_2^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} = \frac{|V_{12}|^2}{b-a} = \frac{\epsilon^2}{b-a} \end{cases}$$

Таким образом, приближенно спектр записывается как:

$$\begin{cases} \lambda_1 \approx a + \frac{\epsilon^2}{a-b} \\ \lambda_2 \approx b - \frac{\epsilon^2}{a-b} \end{cases}$$

Точное решение Эту задачу можно решить точно. Уравнение на собственные значения для матрицы \hat{H} записывается как:

$$\det(\hat{H} - \lambda) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & \epsilon \\ \epsilon & b - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(b - \lambda) - \epsilon^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - \epsilon^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{a+b}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a+b)^2 + 4\epsilon^2 - 4ab} = \\ &= \frac{a+b}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a-b)^2 + 4\epsilon^2} \end{aligned}$$

Представим ответ в виде разложения по ϵ :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2} \sqrt{1 + \frac{4\epsilon^2}{(a-b)^2}} \approx \\ &\approx \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2} \left(1 + \frac{2\epsilon^2}{(a-b)^2} \right) = \\ &= \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2} \pm \frac{\epsilon^2}{a-b} = \begin{cases} a + \frac{\epsilon^2}{a-b} \\ b - \frac{\epsilon^2}{a-b} \end{cases} \end{aligned}$$

таким образом, ответ, полученный теорией возмущений и точное решение совпадают.

9.3 Задача 2 (эффект Штарка)

В атоме водорода энергетические уровни нумеруются тремя квантовыми числами n, l и m . При этом число $n = 1, 2, \dots$; при фиксированном n , число $l = 0, 1, \dots, n-1$, а при фиксированных n и l , число $m = -l, \dots, l$. Энергия же состояния атома водорода зависит только от числа n (и выражается как $E = -\frac{\text{Rd}}{n^2}$, где Rd называется постоянной Ридберга); тем самым, состояние с $n = 2$ оказывается четырёхкратно вырожденным по энергии (энергии E_2 соответствуют состояния $|n, l, m\rangle \in \{|2, 0, 0\rangle, |2, 1, -1\rangle, |2, 1, 0\rangle, |2, 1, 1\rangle\}$). Наложение электрического поля воспринимается в этой задаче как возмущение; при этом возмущенный оператор энергии (гамильтониан), записывается как:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_2 & V & 0 & 0 \\ V^* & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

Собственные значения этого оператора в квантовой механике играют роль допустимых значений энергии системы. Требуется найти поправки при наложении такого возмущения.

Решение В данном случае у невозмущенного оператора \hat{H}_0 имеется четырёхкратно вырожденный уровень энергии E_2 , и имеются четыре собственных вектора:

$$|1^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |2^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |3^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |4^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку имеется вырождение, то необходимо применять вырожденный случай теории возмущений. Следуя ему, необходимо записать секулярное уравнение:

$$\det(\hat{V} - \mu) = \det \begin{pmatrix} -\mu & V & 0 & 0 \\ V^* & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix} = \\ = \mu^2 (\mu^2 - |V|^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mu_{1,2} = \pm |V| \\ \mu_{3,4} = 0 \end{cases}$$

Далее, необходимо найти собственные вектора, соответствующие этим собственным значениям. Пусть $V = |V| e^{i\varphi}$ (V — комплексное число). Тогда, уравнения на собственные вектора записываются как:

$$(\hat{V} - \mu_k) |m_k\rangle = 0$$

Получаем:

$$\begin{pmatrix} -|V| & |V| e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ |V| e^{-i\varphi} & -|V| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -|V| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -|V| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{14} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow |m_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} |V| & |V| e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ |V| e^{-i\varphi} & |V| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |V| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |V| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \\ m_{24} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow |m_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и тривиально $|m_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $|m_4\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Как мы пом-

ним, вектора $|m_k\rangle$ называются “правильными векторами ведущего приближения”, и они замечательны тем, что вместо базиса $\{|k^{(0)}\rangle\}_{k=1}^4$ можно рассматривать базис $\{|m_k\rangle\}_{k=1}^4$, для которого применять формулы невырожденной теории возмущений. В первом порядке теории возмущений эти формулы дадут как раз значения μ_k . Таким образом, получается результат:

$$\begin{cases} E_{2;1} & = E_2 - |V| \\ E_{2;2} & = E_2 + |V| \\ E_{2;3,4} & = E_2 \end{cases}$$

Таким образом, уже в первом порядке теории возмущений, вырождение частично снялось (вместо четырёхкратно вырожденного уровня энергии E_2 мы получаем однократно

вырожденный уровень энергии $E_2 + |V|$, однократно вырожденный уровень $E_2 - |V|$ и двукратно вырожденный уровень E_2). Кроме того, расщепление линейно по возмущению $|V|$; это — прямое следствие вырождения в этой задаче; в квантовой механике это называется линейным эффектом Штарка. Если бы вырождения не было, то ведущий порядок был бы лишь во втором порядке теории возмущений, и поправки к уровням энергии были бы квадратичны по $|V|$ (как в первой задаче).

9.4 Задачи для домашнего решения

Задача 1 Воспроизвести вывод выражений для поправки первого и второго порядков по теории возмущений к собственным значениям, а также для поправки первого порядка теории возмущений к собственным векторам (было на лекции)

Задача 2* Вывести поправку третьего порядка к собственным значениям и второго порядка к собственным векторам.

Замечание в определенный момент необходимо будет учесть, что возмущённый собственный вектор должен быть нормированным (то есть иметь длину 1). Это условие даст дополнительное уравнение на коэффициенты.

10 Преобразования Фурье

10.1 Интеграл Фурье

Если есть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то для неё можно определить разложение в интеграл Фурье (так называемое обратное преобразование Фурье):

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(p) e^{ipx} \frac{dp}{2\pi}$$

При этом функцию $\tilde{f}(p)$ можно получить, используя прямое преобразование Фурье:

$$\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$$

Согласованность двух формул обеспечивается следующим выражением для δ -функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} dp = 2\pi \delta(x)$$

Напомним, δ -функция определяется как функция, такая, что для любой функции $f(x)$ выполнено:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

Замечание В разных источниках преобразование Фурье вводится по-разному. Например, в прямом преобразовании Фурье вместо e^{-ipx} можно написать e^{ipx} ; в таком случае аналогичную замену нужно проделать и в обратном преобразовании Фурье; соотношения по-прежнему останутся согласованными. Кроме того, в математике часто рассматривается преобразование Фурье, в котором в интегралах вместо dx и $\frac{dp}{2\pi}$ стоит $\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ и $\frac{dp}{\sqrt{2\pi}}$; допустим любой выбор констант, лишь бы их произведение было 2π .

10.2 Ряд Фурье

Если есть функция $f(x)$, периодическая с периодом T (или просто определенная на отрезке длиной T ; в таком случае ее можно просто периодически продолжить), то для этой функции можно определить разложение в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\omega_n t}$$

Периодичность функции обеспечивается требованием на частоты $\omega_n T = 2\pi n$. Коэффициенты ряда Фурье можно получить из соотношения

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Согласованность разложения в ряд Фурье обеспечивается следующим тождеством (тождество Пуассона):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + n \cdot T) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n t}$$

Замечание Тут тоже имеется произвол в выборе знаков в экспоненте (лишь бы они были разные) и в коэффициентах перед интегралом и рядом (лишь бы их произведение равнялось T).

10.3 Ряд Фурье для решёточных функций

Если есть исходная функция, определенная на решётке (то есть, на самом деле, она представляет собой обычную числовую последовательность) f_n , $n \in \mathbb{Z}$. В таком случае, можно рассмотреть преобразование, аналогичное предыдущему, только в “обратном” направлении. А именно, можно рассмотреть разложение f_n по плоским волнам в виде

$$f_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(k) e^{ikn} \frac{dk}{2\pi}$$

и выражение для $f(k)$ ($k \in [-\pi; \pi]$) даётся выражением:

$$f(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-ikn}$$

Это преобразование полностью аналогично предыдущему, и его согласованность тоже обеспечивается тождеством Пуассона.

10.4 Дискретное преобразование Фурье

Если есть исходный набор из N чисел f_n , $n = 1, \dots, N$, то для него можно определить дискретное преобразование Фурье. Оно представляет собой разложение по дискретному набору плоских волн:

$$f_n = \sum_k \tilde{f}_k e^{ikn}$$

при этом волновой вектор $k_m = \frac{2\pi}{N} m$ и $m = 1, \dots, N$; под $\sum_k f(k)$ подразумевается $\sum_{m=1}^N f(k_m)$. При этом обратное преобразование Фурье даётся выражением

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n e^{-ikn}$$

Согласованность дискретного преобразования Фурье обеспечивается следующим тождеством:

$$\sum_k e^{ikn} = N \delta_{n0} = \begin{cases} N, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Замечание Интересно, что разложение в ряд Фурье можно получить как предел $N \rightarrow \infty$ у дискретного преобразования Фурье; а разложение в интеграл Фурье можно получить как предел $T \rightarrow \infty$ разложения в ряд Фурье. Таким образом, все эти преобразования получаются друг из друга.

10.5 Задача 1 (потенциал Юкавы или потенциал Дебая)

В рамках Стандартной Модели возникает так называемое взаимодействие Юкавы. Если имеется точечная частица, несущая “заряд” q и расположенная в начале координат, то оказывается, что потенциал, создаваемый этим зарядом (аналог электрического потенциала) удовлетворяет уравнению

$$-\Delta\varphi(\mathbf{r}) + \kappa^2\varphi(\mathbf{r}) = 4\pi q \cdot \delta(\mathbf{r})$$

где $\Delta\varphi(\mathbf{r}) \equiv \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа; κ — некий параметр задачи. Решим это уравнение, найдём потенциал.

Решение Исходное однородное уравнение (без правой части) удовлетворяет требованию трансляционной инвариантности (то есть — если провести в уравнении замену $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}$, где \mathbf{a} — произвольный вектор, то уравнение не изменится); это значит, что его можно решать при помощи преобразования Фурье.

Подставим в уравнение $\varphi(\mathbf{r})$ в виде (обратное преобразование Фурье):

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &\equiv \varphi(x, y, z) = \\ &= \iiint \varphi(p_x, p_y, p_z) e^{ip_x x + ip_y y + ip_z z} \frac{dp_x}{2\pi} \cdot \frac{dp_y}{2\pi} \cdot \frac{dp_z}{2\pi} \equiv \\ &\equiv \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \cdot \varphi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \end{aligned}$$

(тут для удобства функцию $\varphi(\mathbf{r})$ и её фурье-образ $\varphi(\mathbf{p})$ мы обозначаем одинаково; чтобы их различать, будем иметь в виду, что когда аргумент функции — \mathbf{p} , то имеется в виду фурье-образ, а когда аргумент — \mathbf{r} , то имеется в виду сама функция).

В таком случае, все дифференцирования, содержащиеся в операторе Лапласа, можно “пронести” под знак интеграла, где они будут действовать только на экспоненту как $\frac{\partial}{\partial x} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} =$

$ip_x e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$. Таким образом, можно сразу записать:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{p}) (-\mathbf{p}^2) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

По свойству δ -функции, правую часть можно тоже представить в виде преобразования Фурье от константы:

$$4\pi q \cdot \delta(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} 4\pi q \cdot e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

А значит, уравнение запишется как

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (\mathbf{p}^2 + \kappa^2) \varphi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} 4\pi q \cdot e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

А теперь мы можем провести преобразование Фурье этого выражения. В данном уравнении это равносильно условному “сокращению” операции $\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \dots e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$ слева и справа. Таким образом, для Фурье-образа $\varphi(\mathbf{p})$ получается тривиальное скалярное уравнение:

$$\varphi(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{p}^2 + \kappa^2) = 4\pi q \Rightarrow \varphi(\mathbf{p}) = \frac{4\pi q}{\mathbf{p}^2 + \kappa^2}$$

Теперь, поскольку мы знаем, как выглядит Фурье-образ функции $\varphi(\mathbf{r})$, мы можем провести обратное преобразование Фурье:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \cdot \varphi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{4\pi q}{\mathbf{p}^2 + \kappa^2} \cdot e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

Этот интеграл можно взять, перейдя к сферическим координатам. Азимутальный угол θ мы будем отсчитывать от направления вектора \mathbf{r} . Как мы знаем из предыдущих семинаров, якобиан перехода к сферическим координатам выглядит как $d^3\mathbf{p} = p^2 \cdot dp \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$. Таким образом:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty p^2 dp \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{4\pi q}{p^2 + \kappa^2} e^{ipr \cdot \cos\theta}$$

Интеграл по φ берётся тривиально и даёт просто 2π ; также можно взять интеграл по θ , введя замену $z = -\cos\theta$:

$$\int_0^\pi \sin\theta \cdot d\theta \cdot e^{-ipr \cos\theta} = \int_{-1}^1 dz \cdot e^{-ipr \cdot z} = \frac{e^{-ipr} - e^{ipr}}{-ipr} = \frac{2 \sin(pr)}{pr}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty p^2 dp \cdot \frac{\sin(pr)}{pr} \cdot \frac{1}{p^2 + \kappa^2}$$

Этот интеграл обезразмерим заменой $z = pr$. Получим:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{2q}{\pi r} \int_0^\infty \frac{z \cdot \sin z}{z^2 + \kappa^2 r^2} \cdot dz$$

Получившийся интеграл — это почти интеграл Лапласа, который мы уже считали в 4 семинаре. Напомним ответ:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2 + a^2} \sin(\omega x) \cdot dx = \pi e^{-|a\omega|} \cdot \text{sign}\omega$$

В нашем случае, интеграл берётся лишь по половине интервала, поэтому этот ответ нужно поделить пополам; параметр $\omega = 1$, а параметр $a = \kappa r$. Таким образом, мы получаем:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} e^{-\kappa r}$$

Полученный ответ совпадает с законом Кулона на малых расстояниях $r \ll \frac{1}{\kappa}$; на больших расстояниях возникает эффект экранирования. Аналогичное явление возникает в плазме, при внесении в неё электростатического заряда q . Явление это называется дебаевским экранированием, параметр $\frac{1}{\kappa}$ в этой модели называется дебаевским радиусом. Сам же потенциал тоже иногда называется дебаевским.

10.6 Задача 2

Пусть имеется грузик на пружинке (осциллятор), который возмущается периодической внешней силой $F(t)$. Уравнение движения запишется в таком случае как:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

(где $f(t) = \frac{1}{m} F(t)$ и $\omega^2 = \frac{k}{m}$). Внешняя сила имеет период T и имеет вид “прямоугольников”: сперва в течении первой половины периода, грузик “тянут” в одну сторону, а затем - в другую:

$$f(t) = \begin{cases} -f_0 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ f_0 & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Иследуем отклик осциллятора на такую периодическую силу. Решим задачу с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Решение В силу однородности по времени уравнения без правой части (однородность и трансляционная инвариантность - это одно и то же), различные гармоники (колебания с различными частотами) будут жить независимо.

Значит, для исследования уравнения нужно представить возмущающую силу $f(t)$ в виде разложения в ряд Фурье. Поскольку функция имеет период T , то разложение будет содержать лишь гармоники $\omega_n T = 2\pi n \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{T}n$. Получаем:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t}$$

в таком случае коэффициенты ряда Фурье будут выражаться как:

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{i\omega_n \tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{T} \left\{ - \int_{-T/2}^0 f_0 e^{i2\pi \frac{\tau}{T} n} d\tau + \int_0^{T/2} f_0 e^{i2\pi \frac{\tau}{T} n} d\tau \right\} = \\ &= \frac{f_0}{T} \int_0^{T/2} \{ e^{i2\pi \frac{\tau}{T} n} - e^{-i2\pi \frac{\tau}{T} n} \} d\tau = \\ &= 2i \frac{f_0}{T} \int_0^{T/2} \sin\left(2\pi \frac{\tau}{T} n\right) d\tau = 2i \frac{f_0}{T} \cdot \frac{1 - \cos \pi n}{2\pi n/T} = \\ &= if_0 \cdot \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} = \begin{cases} \frac{2if_0}{\pi} \cdot \frac{1}{n}, & n = 2k + 1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \end{aligned}$$

В силу вещественности функции $f(t)$, коэффициенты f_n всегда должны удовлетворять условию $f_{-n} = f_n^*$. Кроме того, в силу нечётности функции $f(t)$, коэффициенты также удовлетворяют условию $f_{-n} = -f_n$.

В таком случае, решение можно искать в виде разложения по таким гармоникам. Кроме того, для того, чтобы записать общее решение, необходимо добавить решение однородного уравнения (то есть уравнения без правой части), которое в данном случае представляет собой $C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$ с произвольными константами C_1 и C_2 . Получаем:

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i\omega_n t}$$

Подстановка в уравнение даёт нам

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n (\omega^2 - \omega_n^2) e^{-i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t}$$

Значит, мы можем условно “сократить” на $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dots e^{-i\omega_n t}$ и получить:

$$x_n = \frac{f_n}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

Таким образом, общее решение представляется в виде ряда:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f_n}{\omega^2 - \omega_n^2} e^{-i\omega_n t} = \\ &= C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \sum_{n=2k+1} \frac{2if_0}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2} e^{-i\omega_n t} = \\ &= C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \sum_{n=2k+1, k \geq 0} \frac{4f_0}{\pi n} \frac{\sin \omega_n t}{\omega^2 - \omega_n^2} \end{aligned}$$

Теперь исследуем задачу Коши. Определим константы C_1 и C_2 решения из начальных условий. Поскольку $x(0) = 0$, то $C_2 \equiv 0$. Кроме того, поскольку $\dot{x}(0) = 0$, то:

$$\omega C_1 + \sum_{n=2k+1, k \geq 0} \frac{4f_0}{\pi n} \frac{\omega_n}{\omega^2 - \omega_n^2} = 0$$

поэтому подставляя C_1 , окончательно ответ можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{n=2k+1, k \geq 0} \frac{4f_0}{\pi n} \cdot \frac{\sin \omega_n t - \frac{\omega_n}{\omega} \sin \omega t}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

Ряд этот в общем случае не суммируется. Однако наибольший интерес представляет случай резонанса. Структура ответа подсказывает нам, что резонанс будет наступать, когда какая-то из ω_{2k+1} будет близка или равна ω . В таком случае, эта гармоника будет иметь наибольшую амплитуду и будет давать наибольший вклад в ряд; из всего ряда можно оставить лишь её. Значит, в случае близости к резонансу, решение будет выглядеть как:

$$x(t) \approx x_n e^{-i\omega_n t} + x_{-n} e^{i\omega_n t} = \frac{4f_0}{\pi n} \cdot \frac{\sin \omega_n t - \frac{\omega_n}{\omega} \sin \omega t}{\omega^2 - \omega_n^2}, \quad \omega \approx \omega_n$$

Сам резонанс, когда $\omega = \omega_n$, можно получить, воспользовавшись трюком: в этом выражении можно взять предел $\omega \rightarrow \omega_n$, расписав его по правилу Лопиталя. Это даст ответ:

$$x(t) \approx -\frac{2f_0}{\pi\omega n} t \cos \omega t, \quad \omega = \omega_n$$

Мы видим, что в случае резонанса, амплитуда соответствующей гармоники будет неограниченно возрастать со временем.

10.7 Задача 3 (случайные блуждания на решетке)

Рассмотрим задачу, которая является моделью диффузии. Пусть имеется одномерная решётка (набор узлов $n \in \mathbb{Z}$). В начальный момент времени $N \gg 1$ частиц посадили в узел $n = 0$. Затем частицы начинают случайно блуждать по решётке, причём за время dt каждая частица может перейти в один из двух соседних узлов с вероятностью $\lambda \cdot dt$ ($\lambda > 0$ - параметр задачи). Исследуем движение частиц.

Замечание Вместо рассмотрения N частиц и исследования числа частиц, эквивалентно можно рассматривать 1 частицу и исследовать вероятность нахождения частицы на каком-то из узлов.

Решение Пусть в момент времени t , число частиц на узле n равна $p_n(t)$. Кроме того, начальные условия задачи таковы, что

$$p_n(0) = N \cdot \delta_{n0} = \begin{cases} N, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Случайный процесс, описанный в условии задачи, можно представить в виде бесконечной системы дифференциальных уравнений. За время dt , в узел с номером n из узлов с номерами $n \pm 1$ приходит $p_{n\pm 1}(t) \cdot \lambda \cdot dt$ частиц; кроме того, с этого узла в соседние уходит $2p_n(t) \cdot \lambda \cdot dt$ частиц. Полная система дифференциальных уравнений тем самым записывается как

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda(p_{n-1}(t) + p_{n+1}(t) - 2p_n(t))$$

Эта задача тоже обладает трансляционной симметрией, как и предыдущие, а значит можно опять воспользоваться

преобразованием Фурье:

$$p_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} p(k, t) e^{ikn}$$

и при этом:

$$p(k, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(t) e^{-ikn}$$

Делая необходимую подстановку в уравнение, мы получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \cdot \frac{dp(k, t)}{dt} \cdot e^{ikn} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} p(k, t) \cdot \lambda (e^{-ik} + e^{ik} - 2)$$

Опять условно “сокращая” на $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \dots e^{ikn}$, получаем тривиальное уравнение:

$$\frac{dp(k, t)}{dt} = -2\lambda(1 - \cos k)$$

$$p(k, t) = p(k, 0) \exp(-2\lambda(1 - \cos k)t)$$

Теперь необходимо определить начальные условия. Возвращаясь к определению $p(k, t)$:

$$p(k, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(0) e^{-ikn} = N$$

Пользуясь обратным преобразованием Фурье, ответ можно выразить как:

$$p_n(t) = N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \exp(-2\lambda(1 - \cos k)t + ikn)$$

Преобразуем интеграл, избавившись от мнимой единицы (вероятность - величина чисто вещественная). Для этого добавим такой же интеграл с заменой $k \rightarrow -k$ и разделим пополам:

$$p_n(t) = N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \exp(-2\lambda(1 - \cos k)t) \cos kn$$

Мы получили ответ на вопрос задачи в виде интеграла. Этот интеграл не берётся в элементарных функциях, однако можно исследовать аналитически различные асимптотики, используя большое количество методов, изложенных в этом курсе ранее. Кроме того, его можно исследовать численно.

10.8 Задачи для домашнего решения

Задача 1 Исследовать случай резонанса в задаче 2 этого семинара, предполагая коэффициенты ряда Фурье зависящими от времени.

Задачи 2, 3 и 4 Исследовать ведущие асимптотики решения задачи 3 этого семинара при малых временах $t \ll 1/\lambda$ для всех n , а также при больших временах $\lambda t \gg n^2$. Отдельно, получить выражение для $\lambda t \gg 1$. Сравнить его с решением непрерывной задачи диффузии, разобранный на лекции:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}$$

Выясните, как связаны параметры непрерывной задачи (коэффициент диффузии) с параметрами “микроскопической” задачи (параметр λ).

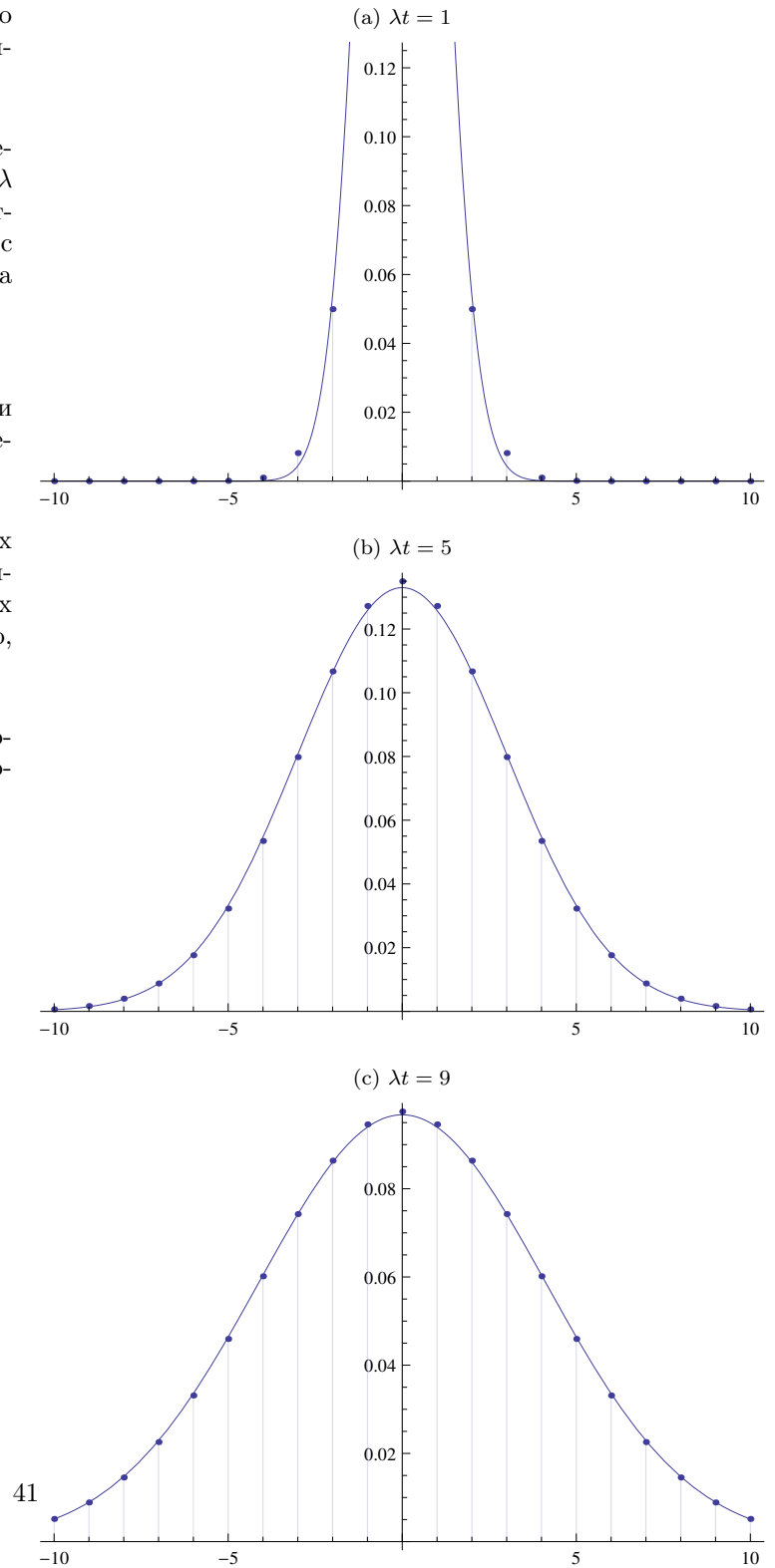
Задача 5 Исследовать модификацию задачи о случайных блужданиях, с дискретным временем. Теперь частица прыгает раз в секунду, и она перепрыгивает в один из соседних узлов с конечной вероятностью $\lambda \leq \frac{1}{2}$, и, соответственно, остаётся на том же узле с вероятностью $1 - 2\lambda$.

Задача 6 Доказать тождество, обеспечивающее согласованность дискретного преобразования Фурье. А именно, показать, что

$$\sum_k e^{ikn} = N\delta_{n0} = \begin{cases} N, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

где $\sum_k f(k) \equiv \sum_{m=1}^N f(k_m)$ и $k_m = \frac{2\pi}{N}m$.

Рис. 14: Численные значения $p_n(t)$ при различных λt



Содержание

1 Трансцендентные уравнения	3	6.5 Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами . . .	20
1.1 Задача 1	3	6.6 Задача 3	21
1.2 Задача 2	3	6.7 Уравнения с разделяющимися переменными . . .	22
1.3 Задачи для домашнего решения	4	6.8 Задача 4	22
2 Интегралы с малым параметром	5	6.9 Задачи для домашнего решения	23
2.1 Задача 1	5	7 Кратные и криволинейные интегралы	23
2.2 Задача 2	5	7.1 Задача 1 (закон Ньютона)	23
2.3 Задача 3	6	7.2 Задача 2	24
2.4 Задачи для домашнего решения	6	7.3 Задача 3	25
3 Метод перевала	7	7.4 Задача 4	26
3.1 Задача 1	7	7.5 Задачи для домашнего решения	26
3.2 Задача 2	7	8 Вариационные задачи	26
3.3 Задача 3	8	8.1 Общая теория	26
3.4 Задача 4	8	8.2 Геометрическая оптика	27
3.5 Задача 5	9	8.3 Задача 1	27
3.6 Задачи для домашнего решения	9	8.4 Статика	29
4 Интегралы, зависящие от параметра	10	8.5 Задача 2	29
4.1 Бета-функция Эйлера	10	8.6 Задачи для домашнего решения	31
4.2 Задача 1	10	9 Алгебраическая теория возмущений	32
4.3 Задача 2	11	9.1 Сводка результатов	32
4.4 Задача 3	12	9.1.1 Обозначения	32
4.5 Задача 4	13	9.1.2 Общие сведения	32
4.6 Задачи для домашнего решения:	13	9.1.3 Теория возмущений	33
5 Интегралы от быстроменяющихся функций. Асимптотические разложения	14	9.2 Задача 1	34
5.1 Метод стационарной фазы	14	9.3 Задача 2 (эффект Штарка)	35
5.2 Задача 1	15	9.4 Задачи для домашнего решения	36
5.3 Задача 2	15	10 Преобразования Фурье	36
5.4 Задача 3	16	10.1 Интеграл Фурье	36
5.5 Задача 4	17	10.2 Ряд Фурье	36
5.6 Задача 5	17	10.3 Ряд Фурье для решёточных функций	37
5.7 Задача 6	18	10.4 Дискретное преобразование Фурье	37
5.8 Задачи для домашнего решения	19	10.5 Задача 1 (потенциал Юкавы или потенциал Дебая)	37
6 Дифференциальные уравнения	19	10.6 Задача 2	38
6.1 Однородные линейные дифференциальные уравнения	19	10.7 Задача 3 (случайные блуждания на решетке)	40
6.2 Задача 1 (разложение в ряд)	19	10.8 Задачи для домашнего решения	41
6.3 Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами	20		
6.4 Задача 2	20		