

# Лекции и семинары по курсу “Избранные главы математической физики”

План лекций разработан И.В.Колоколовым и В.В.Лебедевым. Планы семинарских занятий, на которых разбираются задачи, разработаны группой под руководством Ю.Аникина, в которую входят также С. Белан, С. Вергелес, М. Герцев и Е. Остроухова.

## Contents

1. Эволюционные задачи	1
2. Граничные задачи	3
3. Уравнения Шрёдингера и диффузии	6
4. Динамо	7
5. Квантовые вихри	8
6. Уравнения на медленные переменные	10
7. Функции Бесселя	12
8. Полиномы Лежандра	16
9. Полиномы Эрмита	18
10. Вырожденная гипергеометрическая функция	20
11. Гамма-функция Эйлера	22
12. Уравнения Хопфа и Бюргера	24
13. Уравнение Кортевега-де-Фриза	26
14. Уравнение синус-Гордона	27
15. Нелинейное уравнение Шрёдингера	28
16. Отдельные вопросы	31
А. $\delta$ -функция Дирака	31
В. Преобразование Фурье	32
С. Преобразование Лапласа	34
D. Собственные функции оператора	35
17. Отдельные методы	37
А. Метод характеристик	37
В. Метод стационарной фазы	37
С. Метод перевала	37
D. Обобщенный метод перевала	38
E. Метод WKB	38
F. Нётеровские интегралы движения	39
Список литературы	40

## 1. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Во многих физических приложениях возникает задача о реакции системы на внешнее воздействие, вы-

водящее ее из равновесия. Чтобы найти состояние системы в данный момент времени, надо решить эволюционную задачу, поскольку это состояние будет определяться предысторией системы.

Если отклонение системы от равновесия невелико, то ее реакцию на внешнее воздействие можно изучать в рамках линейных уравнений. Рассмотрим простейший пример такого уравнения:

$$\frac{dx}{dt} + \gamma x = \phi, \quad (1.1)$$

где  $x(t)$  – переменная, описывающая отклонение системы от равновесия,  $\gamma$  – кинетический коэффициент (некоторый положительный параметр), а величина  $\phi(t)$  представляет внешнее воздействие, выводящее систему из равновесия. Уравнение (1.1) возникает, например, при описании движения частицы в сильно вязкой среде, когда ее инерционными свойствами можно пренебречь. Решение уравнения (1.1) можно записать, как интеграл

$$x(t) = \int ds G(t-s)\phi(s). \quad (1.2)$$

Здесь  $G(t)$  – так называемая функция Грина, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{dG}{dt} + \gamma G = \delta(t), \quad (1.3)$$

то есть уравнению (1.1) с  $\phi = \delta(t)$ . (Основные свойства  $\delta$ -функции приведены в разделе 16 А.) Это утверждение проверяется непосредственно: применяя к правой части (1.2) оператор  $d/dt + \gamma$  и пользуясь затем соотношением (1.3), мы находим, что  $x(t)$  является решением уравнения (1.1).

Однако Гриновская функция  $G(t)$  неоднозначно определена уравнением (1.3), поскольку его решение определено с точностью до решения однородного (то есть без правой части) уравнения (1.1). Для того, чтобы однозначно определить Гриновскую функцию  $G(t)$ , необходимо привлечь принцип причинности. Из соотношения (1.2) следует, что  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ , поскольку система может реагировать только на воздействие, имевшее место в прошлом. Принцип причинности уже однозначно фиксирует Гриновскую функцию. В силу того, что  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ , выражение (1.2) можно переписать в следующем виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^t ds G(t-s)\phi(s). \quad (1.4)$$

Здесь подразумевается, что внешнее воздействие  $\phi$  действует на полном временном интервале, от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Найдем явное выражение для Гриновской функции  $G(t)$ , которая определяется уравнением (1.3). Поскольку  $\delta(t)$  равна нулю при  $t > 0$ , то в этой области  $G(t)$  является решением однородного уравнения (1.1), то есть  $G(t) = A \exp(-\gamma t)$ , где  $A$  – некоторая константа. Учитывая, что  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ , мы заключаем, что при  $t = 0$  функция  $G(t)$  испытывает скачок  $A$ . В силу уравнения (1.3) и соотношения (16.8) этот скачок должен быть равен единице. Таким образом,  $A = 1$ , и мы находим окончательно

$$G(t) = \theta(t) \exp(-\gamma t). \quad (1.5)$$

Подставляя это выражение в соотношение (1.4), мы находим

$$x(t) = \int_{-\infty}^t ds \exp[-\gamma(t-s)]\phi(s). \quad (1.6)$$

Таким образом, система постепенно забывает о воздействии на нее, которое было в прошлом.

Выражение (1.4) или (1.6) подразумевает, что мы рассматриваем эволюцию системы на бесконечном временном интервале. В то же время широко распространены задачи, когда состояние системы задано в начальный момент времени, а далее она эволюционирует под внешним воздействием. Будем отсчитывать время от момента, когда задано начальное состояние. Тогда вместо (1.4) решение уравнения переписывается в следующем виде

$$x(t) = x(0)G(t) + \int_0^t ds G(t-s)\phi(s), \quad (1.7)$$

где  $x(0)$  – начальное значение переменной  $x$ . Действительно, выражение (1.7) удовлетворяет исходному уравнению и начальному условию, поскольку  $G(+0) = 1$ .

Рассмотрим более сложный пример, а именно уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x = \phi, \quad (1.8)$$

где  $\nu$  имеет смысл собственной частоты колебаний системы. Решение уравнения (1.8) можно записать через Гриновскую функцию  $G(t)$ , в виде (1.2) или (1.4). Функция  $G(t)$  удовлетворяет уравнению (1.8) с  $\delta$ -функцией в правой части:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \nu^2\right)G(t) = \delta(t). \quad (1.9)$$

Найдем решение этого уравнения.

Как мы уже объяснили, в силу причинности  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ . В отличие от Гриновской функции (1.5), решение уравнения (1.9) остается непрерывным при  $t = 0$  в силу того, что в его левой части стоит вторая производная по  $t$ . В этом случае  $\delta$ -функция производится, если скачок испытывает первая производная

от функции, смотри раздел 16 А. Используя соотношение (16.8), легко найти, что скачок первой производной в  $G(t)$  должен быть равен 1. Таким образом, мы получаем, что при  $t = +0$   $G = 0$ ,  $G' = 1$ . Эти значения можно рассматривать, как начальные условия для однородного уравнения, определяющего  $G(t)$  при  $t > 0$ , поскольку правая часть уравнения (1.9) в этом случае равна нулю. Задача легко решается, и мы находим

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\nu} \sin(\nu t). \quad (1.10)$$

Обратим внимание на осциллирующий характер Гриновской функции.

Выражение (1.4) дает решение уравнения (1.8) на бесконечном временном интервале. Но, как и выше, при помощи функции Грина можно выразить и решение задачи Коши, то есть задачи с начальными условиями. В данном случае мы имеем дело с уравнением второго порядка, то есть этими условиями являются значения функции и ее производной,  $x$  и  $\dot{x}$ , в начальный момент времени, в качестве которого мы выберем  $t = 0$ . Решение задачи Коши для уравнения (1.8) записывается в следующем виде

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t ds G(t-s)\phi(s). \quad (1.11)$$

Это выражение, очевидно, удовлетворяет уравнению (1.8), а также начальным условиям, что легко проверить с использованием соотношений  $G(+0) = 0$ ,  $\dot{G}(+0) = 1$ ,  $\ddot{G}(+0) = 0$ , следующих из выражения (1.10).

В принципе, решение любого линейного эволюционного уравнения можно выразить через соответствующую функцию Грина. Однако этот способ эффективен, если известно явное выражение для функции Грина. Его можно найти для уравнений вида

$$L(d/dt)x = \phi, \quad (1.12)$$

где  $L(z)$  – некоторый полином от  $z$ . Именно к типу (1.12) относятся рассмотренные нами выше уравнения (1.1,1.8). Решение уравнения (1.12) записывается в виде (1.2), где функция Грина удовлетворяет уравнению

$$L(d/dt)G(t) = \delta(t). \quad (1.13)$$

Выше мы нашли явные выражения для функций Грина уравнений (1.1,1.8). Изложим теперь метод, применимый для уравнения (1.12) общего вида.

Запишем Гриновскую функцию в виде интеграла Фурье

$$G(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) \tilde{G}(\omega). \quad (1.14)$$

Учитывая соотношение (16.4), мы находим

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{L(-i\omega)}. \quad (1.15)$$

Подставляя выражение (1.15) в интеграл Фурье (1.14) и производя интегрирование по частоте  $\omega$ , можно найти выражение для функции Грина  $G(t)$ . Технически взятие интеграла сводится к вычитам в нулях  $L(-i\omega)$ .

Здесь надо сделать следующее замечание. Для устойчивой системы все полюса выражения (1.15) лежат в нижней полуплоскости, что соответствует затуханию возмущений в отсутствие внешнего воздействия. В этом случае интеграл (1.14) равен нулю при  $t < 0$ . Действительно, сдвигая контур интегрирования вверх (подынтегральное выражение аналитично в верхней полуплоскости), мы получаем в пределе ноль при  $t < 0$ . Таким образом, функция Грина, получающаяся из интеграла (1.14), автоматически обладает необходимым свойством причинности. В то же время для неустойчивой системы имеются полюса выражения (1.15) в верхней полуплоскости. В этом случае контур интегрирования в интеграле (1.14) надо деформировать так, чтобы обойти все полюса выражения (1.15) сверху. Это обеспечит функции Грина необходимые свойства причинности. В то же время такой интеграл с деформированным контуром будет по-прежнему удовлетворять уравнению (1.13), как можно убедиться прямой проверкой с использованием соотношения (16.4).

- Найти решение задачи Коши для уравнения (1.1) при нулевых начальных условиях и  $\phi = \exp(-\alpha t)$ ,  $\alpha > 0$ .
- Найти решение задачи Коши для уравнения (1.8) при нулевых начальных условиях и  $\phi = \exp(-\alpha t)$ ,  $\alpha > 0$ .
- Найти выражения для Гриновских функций (1.5, 1.10), исходя из соотношений (1.14, 1.15).
- Найти Гриновскую функцию уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \nu^2 x = \phi.$$

- Найти Гриновскую функцию уравнения

$$\left( \frac{d^4}{dt^4} + 4\nu^2 \frac{d^2}{dt^2} + 3\nu^4 \right) x = \phi.$$

- Найти Гриновскую функцию уравнения

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \nu^2 \right)^2 x = \phi.$$

## 2. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

В предыдущей лекции мы рассматривали задачи эволюционного типа, когда решение определялось

внешним воздействием и начальными условиями, взятыми в начальный момент времени. Однако весьма важны также краевые или граничные задачи, когда искомая функция удовлетворяет каким-либо условиям на границах некоторой области в пространстве. Простейшие по постановке краевые задачи и соответствующие функции Грина возникают в электростатике, когда, например, требуется найти поле системы (распределенных) зарядов в присутствии проводников. Более сложные задачи такого типа возникают при исследовании распространения электромагнитных волн. Здесь мы будем изучать одномерный случай, когда область, в которой мы будем искать решение краевых задач, является просто интервалом  $(a, b)$ . Тогда условия на интересующие нас функции накладываются на границах интервала, при  $x = a$  и  $x = b$ .

Рассмотрим в качестве примера потенциал  $\Phi$  распределения заряда, плотность которого  $\rho$  зависит только от одной координаты  $x$ . В этом случае потенциал также зависит только от координаты  $x$  и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi = -4\pi\rho. \quad (2.1)$$

Поскольку уравнение (2.1) является дифференциальным уравнением второго порядка, его надо дополнить граничными условиями. Если, например, речь идет об области пространства между заземленными параллельными металлическими поверхностями, заданными условиями  $x = a$  и  $x = b$ , то граничные условия имеют вид  $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ . Мы будем говорить о таких граничных условиях, как нулевых.

Введем теперь соответствующую уравнению (2.1) функцию Грина  $G(x, y)$ , которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x, y) = \delta(x - y), \quad a < x, y < b, \quad (2.2)$$

а также граничным условиям  $G(a, y) = G(b, y) = 0$ . Обратим внимание на то, что функция Грина зависит теперь от обеих переменных, а не просто от их разности, как это было в предыдущей лекции. Решение уравнения (2.1) с нулевыми граничными условиями запишется в виде

$$\Phi(x) = \int_a^b dy G(x, y)[-4\pi\rho(y)]. \quad (2.3)$$

Очевидно, выражение (2.3) удовлетворяет уравнению (2.1) в силу (2.2) и нулевым граничным условиям, поскольку им удовлетворяет функция Грина.

Найдем явное выражение для функции Грина  $G(x, y)$ . Для этого заметим, что при  $x < y$  уравнение (2.2) сводится к  $G'' = 0$ , что дает  $G(x, y) = A(x - a)$ , где  $A$  — некоторая константа. Это общее решение уравнения с нулевым граничным условием при  $x = a$ . Аналогично, при  $x > y$  мы находим  $G(x, y) = B(x - b)$ ,

где  $B$  – другая константа. Это выражение удовлетворяет тому же уравнению  $G'' = 0$  и нулевому граничному условию при  $x = b$ . Поскольку функция Грина удовлетворяет уравнению второго порядка по  $x$ , она должна быть непрерывной в точке  $x = y$ , что дает соотношение  $A(y - a) = B(y - b)$ . Далее, скачок производной функции Грина  $G(x, y)$  в точке  $x = y$  равен  $B - A$ , что в силу уравнения (2.2) должно быть равно единице. Решая полученные уравнения для  $A$  и  $B$ , и подставляя результат в выражение для функции Грина, мы находим

$$G(x, y) = \begin{cases} (y - b)(x - a)(b - a)^{-1}, & x < y, \\ (y - a)(x - b)(b - a)^{-1}, & x > y. \end{cases} \quad (2.4)$$

Обратим внимание на то, что функция Грина (2.4) симметрична:  $G(x, y) = G(y, x)$ .

Рассмотрим теперь более общую задачу, которая ставится для функции  $f(x)$  на интервале  $a < x < b$  и формулируется в виде следующего дифференциального уравнения

$$\hat{L}f(x) = \phi, \quad (2.5)$$

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + Q \frac{d}{dx} + U, \quad (2.6)$$

где  $\hat{L}$  называется дифференциальным оператором типа Штурма-Лиувилля. Здесь ‘сила’  $\phi$  и факторы  $Q$ ,  $U$  являются заданными функциями  $x$ . Решение уравнения (2.5) подразумевает наложение некоторых граничных условий на функцию  $f(x)$  на границах интервала, то есть при  $x = a$  и  $x = b$ . Они не обязательно должны быть нулевыми, возможны и другие варианты. Например, встречаются нулевые условия на производную  $f'$  в точках  $x = a$  и  $x = b$  или смешанные граничные условия, связывающие значения производной  $f'$  и функции  $f$  в точках  $x = a$  и  $x = b$ .

Решение уравнения (2.5) можно по аналогии с (2.3) написать в виде свертки правой части уравнения (2.5) с функцией Грина  $G(x, y)$ :

$$f(x) = \int_a^b dy G(x, y)\phi(y), \quad (2.7)$$

которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\hat{L}G(x, y) = \delta(x - y) \quad (2.8)$$

и соответствующим граничным условиям при  $x = a$  и  $x = b$ . Действительно, интеграл в формуле (2.7) удовлетворяет уравнению (2.5) в силу (2.8) и граничным условиям по построению.

Заметим, что любой функции  $\mathcal{H}(x, y)$  можно сопоставить оператор  $\hat{\mathcal{H}}$ , действие которого на функцию  $f(x)$  представляется сверткой:

$$\hat{\mathcal{H}}f = \int_a^b dy \mathcal{H}(x, y)f(y). \quad (2.9)$$

Единичному оператору, очевидно, соответствует  $\delta$ -функция, так как

$$\int_a^b dy \delta(x - y)f(y) = f(x),$$

если  $a < x < b$ . Действие дифференциального оператора (2.6) также может быть переписано в виде (2.9) с помощью  $\delta$ -функции и ее производных, но обычно проще придерживаться традиционных обозначений. Равенство (2.8) означает, что  $\hat{G} = \hat{L}^{-1}$ . Таким образом, аргументы  $x, y$  можно рассматривать, как обобщение матричных и векторных индексов в линейной алгебре. Отличием от конечномерного случая является необходимость фиксации класса функций (который определяется граничными условиями), на котором действует соответствующий оператор.

Приведенная выше конструкция, работающая при  $Q = U = 0$ , подсказывает нам, как найти функцию Грина  $G(x, y)$  в случае произвольного оператора типа Штурма-Лиувилля (2.6). Введем сначала два решения однородного уравнения (2.8)  $u$  и  $v$  (то есть  $\hat{L}u = 0 = \hat{L}v$ ), которые удовлетворяют ‘левому’ (при  $x = a$ ) и ‘правому’ (при  $x = b$ ) граничным условиям, соответственно. Для нулевых граничных условий это  $u(a) = 0$  и  $v(b) = 0$ . Функцию Грина можно искать в виде

$$G(x, y) = \begin{cases} Au(x), & x < y, \\ Bv(x), & x > y, \end{cases} \quad (2.10)$$

где  $A, B$  – некоторые параметры, не зависящие от  $x$ . Тогда уравнение (2.8) будет выполняться при  $x < y$  и  $x > y$  вместе с граничными условиями при  $x = a$  и  $x = b$ . Константы же  $A$  и  $B$  определяются условием непрерывности функции Грина при  $x = y$  и единичным значением скачка производной

$$G'(y + 0, y) - G'(y - 0, y) = 1. \quad (2.11)$$

Решая полученную систему линейных уравнений для  $A$  и  $B$ , мы приходим к следующему явному выражению для функции Грина  $G(x, y)$ :

$$G(x, y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x < y, \\ v(x)u(y), & x > y. \end{cases} \quad (2.12)$$

Здесь  $W(x)$  – так называемый вронскиан решений  $u(x)$  и  $v(x)$ , который определяется следующим образом

$$W(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x). \quad (2.13)$$

Дифференцируя это выражение и используя уравнения  $\hat{L}u = \hat{L}v = 0$ , легко получить соотношение  $W'(x) = -Q(x)W(x)$ , откуда следует

$$W(x) = W(a) \exp \left[ - \int_a^x dy Q(y) \right]. \quad (2.14)$$

Отметим, что при  $Q = 0$  вронскиан (2.14) не зависит от  $x$  и функция Грина становится симметричной:  $G(x, y) = G(y, x)$ .

Рассмотрим в качестве примера потенциал  $\Phi(r)$  тонкого заряженного цилиндра радиуса  $b$  при условии, что плотность заряда зависит только от расстояния  $r$  от точки наблюдения до оси цилиндра. Уравнение для  $\Phi(r)$  получается из уравнения Пуассона переходом к цилиндрическим координатам:

$$\frac{d^2}{dr^2}\Phi(r) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Phi(r) = -4\pi\rho. \quad (2.15)$$

Выберем значение потенциала на поверхности цилиндра за ноль. Тогда граничными условиями для этой задачи являются  $\Phi(b) = 0$  и отсутствие особенности в  $\Phi$  при  $r = 0$ . Регулярным при  $r = 0$  ‘левым’ решением  $u$  является некоторая константа, которую мы полагаем равной единице,  $u(r) = 1$ . ‘Правое’ же решение  $v$  имеет вид  $v(r) = \ln(r/b)$ , а вронскиан равен  $W(r) = 1/r$ . Поэтому формула (2.12) приводит к следующему выражению для функции Грина оператора в левой части уравнения (2.15):

$$G(r, R) = \begin{cases} b \ln(R/b), & r < R, \\ b \ln(r/b), & r > R. \end{cases} \quad (2.16)$$

Следует отметить, что с точки зрения исходной задачи граничное условие  $\Phi(b) = 0$  было задано на полной границе  $r = b$  области, в которой мы ищем потенциал  $\Phi$ , и этого условия достаточно для его определения. Дополнительное же условие отсутствия особенности при  $r = 0$  возникает из-за перехода к полярной системе координат, приводящему к сингулярности коэффициента при первой производной в уравнении (2.15) в точке  $r = 0$ .

Заметим, что при нулевых граничных условиях и  $Q = 0$  оператор (2.6) является самосопряженным, смотри раздел 16D. Действительно, интегрирование по частям переводит  $\int dx f(d^2/dx^2 + U)g$  в  $\int dx g(d^2/dx^2 + U)f$ , при этом внеинтегральные члены оказываются равными нулю в силу нулевых граничных условий. Оператор  $d^2/dx^2 + U$  является самосопряженным также и на классе периодических функций  $f$ , удовлетворяющих условиям  $f(b) = f(a)$  и  $f'(b) = f'(a)$ , поскольку они также приводят к занулению внеинтегральных членов при интегрировании по частям. Для периодических граничных условий функцию Грина нельзя построить в соответствии с выражением (2.12), так как условия  $f(b) = f(a)$  и  $f'(b) = f'(a)$  связывают значения функции  $f$  на разных концах интервала, так что нельзя ввести ‘левую’ и ‘правую’ функции  $u$  и  $v$ . Поэтому для периодических функций следует использовать более общее выражение (??).

В качестве примера анализа периодических граничных условий рассмотрим простейший оператор  $\hat{L} = d^2/dx^2$ , а на функцию  $f$  наложим периодические граничные условия на интервале  $0 < x < 2\pi$ . Тогда пол-

ный набор собственных функций оператора  $\hat{L}$  будет

$$\cos(nx), n = 0, 1, 2, \dots, \quad \sin(nx), n = 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

что соответствует собственным значениям  $\lambda_n = -n^2$ . Отметим, что для  $n = 1, 2, \dots$  собственные функции нашего оператора являются дважды вырожденными, и что собственные функции (2.17) выбраны так, что выполняется условие ортогональности (16.36). Разложение же (16.37) является не чем иным, как разложением в ряд Фурье периодической функции. Соотношение (16.39) в данном случае приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(nx) \cos(ny) + \sin(nx) \sin(ny)] = \delta(x - y). \quad (2.18)$$

На пространстве периодических функций не существует функции Грина оператора  $\hat{L} = d^2/dx^2$ , поскольку на этом пространстве оператор  $\hat{L} = d^2/dx^2$  имеет нулевое собственное значение, которое достигается при  $n = 0$  в формуле (2.17). Поэтому выражение (??) оказывается некорректным. Тем не менее, можно определить функцию Грина оператора  $\hat{L} = d^2/dx^2$  на пространстве функций, где он не имеет нулевых собственных значений. Собственная функция, соответствующая  $\lambda = 0$ , как следует из формулы (2.17), является просто константой:  $f = \text{const}$ . Таким образом, надо исключить из набора (2.17) константу. Это можно сделать, если наложить на функцию  $f$  дополнительное условие  $\int_0^{2\pi} dx f(x) = 0$ . После этого функцию Грина уже можно найти в соответствии с выражением (??).

Поучительно найти эту функцию Грина, исходя непосредственно из дифференциального уравнения, которое в данном случае приобретает вид

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x - y) = \delta(x - y) - \frac{1}{2\pi}.$$

Дополнительный константный член в правой части этого уравнения связан с тем, что интеграл от этой правой части по  $x$  должен быть равен нулю. Таким образом, функцию Грина можно записать в виде  $G(x, y) = |x - y|/2 + c_1 + c_2x - x^2/(4\pi)$ , где константы  $c_1$  и  $c_2$  находятся из условий периодичности  $G(x - y)$  и условия  $\int_0^{2\pi} dx G(x - y) = 0$ . В результате мы находим

$$G(x - y) = \frac{1}{2}|x - y| - \frac{\pi}{6} - \frac{(x - y)^2}{4\pi}.$$

Отметим, что функция Грина зависит только от разности  $x - y$ , что связано с эффективной однородностью периодической задачи, поскольку интервал, на котором рассматриваются функции  $f$ , можно выбрать в виде  $(w, w + 2\pi)$  с произвольным  $w$ .

- Найти функцию Грина оператора  $d^2/dx^2 + \kappa^2$  для периодических функций с периодом  $2\pi$ .

- Найти решение задачи

$$\frac{d^2}{dx^2} f = \text{sign}(x),$$

на классе периодических функций на интервале  $(-\pi, \pi)$ .

- Найти решение задачи

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \kappa^2 \right) f = \text{sign}(x),$$

на классе периодических функций на интервале  $(-\pi, \pi)$ .

- Доказать, что на интервале  $(-\pi, \pi)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{\sin(x/2)} = 2\pi\delta(x).$$

Указание: найти разложение приведенной функции в ряд Фурье, воспользовавшись соотношением

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin(kx)}{\sin(x/2)} = 2\pi,$$

справедливому для любого целого положительного  $k$ .

- Доказать соотношение (2.18), исходя из интегрального представления  $\delta$ -функции. Указание: представить функцию Грина периодической задачи, как решение уравнения (2.8) на бесконечной прямой с правой частью  $\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y-2\pi n)$ .
- Найти функцию Грина оператора  $\hat{L} = (d/dx + x)(d/dx - x)$  на интервале  $(-l, +l)$  с нулевыми граничными условиями.
- Найти функцию Грина оператора  $\hat{L} = (d/dx - x)(d/dx + x)$  на интервале  $(-l, +l)$  с нулевыми граничными условиями.

### 3. УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА И ДИФФУЗИИ

В ряде физических приложений возникают дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Примерами таких уравнений являются уравнение диффузии и уравнение Шрёдингера для свободной частицы

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nabla^2 U, \quad (3.1)$$

$$-i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nabla^2 \Psi. \quad (3.2)$$

При решении таких уравнений весьма эффективным оказывается пространственное преобразование Фурье. В дальнейшем под решением уравнения мы обычно имеем в виду решение задачи Коши, то есть восстановление функции, подчиняющейся заданному уравнению, по ее начальному значению. Если не оговорено обратное, за начальный момент времени принимается  $t = 0$ .

Мы начнем с уравнения диффузии (3.1). Сделаем Фурье-преобразование по  $\mathbf{x}$ :

$$U = \int \frac{dq_1 \dots dq_d}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{U}(t, \mathbf{q}). \quad (3.3)$$

Тогда уравнение (3.1) ведет к уравнению  $\partial \tilde{U} / \partial t = -q^2 \tilde{U}$ , которое имеет очевидное решение  $\tilde{U}(t, \mathbf{q}) = \exp(-q^2 t) \tilde{U}(0, \mathbf{q})$ . Подставляя это выражение и интеграл

$$\tilde{U}(0, \mathbf{q}) = \int dx_1 \dots dx_d \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) U(0, \mathbf{x})$$

в соотношение (3.3) и беря интегралы по  $\mathbf{q}$ , мы находим

$$U(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right] U(0, \mathbf{y}). \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) в принципе решает задачу Коши, которая заключается в нахождении решения данного дифференциального уравнения по начальному значению функции.

Если начальное поле  $U(0, \mathbf{x})$  локализовано вблизи начала координат, то есть если  $U(0, \mathbf{x})$  достаточно быстро спадает при росте  $|\mathbf{x}|$ , то  $U(t, \mathbf{x})$  обладает универсальной асимптотикой на больших временах. Чтобы установить эту асимптотику, мы рассмотрим времена  $t \gg l^2$ , где  $l$  – длина, на которой локализовано поле  $U(0, \mathbf{x})$ . Это означает, что интеграл (3.4) набирается в области  $|\mathbf{y}| \lesssim l$ . При этом условии можно пренебречь  $\mathbf{y}$  в экспоненте в (3.4). В результате мы заключаем, что при  $t \gg l^2$

$$U(t, \mathbf{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp[-\mathbf{x}^2/(4t)] \quad (3.5)$$

$$A = \int dy_1 \dots dy_d U(0, \mathbf{y}). \quad (3.6)$$

Отметим, что приближение (3.5) соответствует подстановке  $U(0, \mathbf{y}) \rightarrow A\delta(\mathbf{y})$ . Если для локализованного вблизи начала координат поля  $U(0, \mathbf{x})$  интеграл  $A$  (3.6) равен нулю, то асимптотика  $U(t, \mathbf{x})$  на больших временах будет иной. Раскладывая экспоненту в (3.4) по  $\mathbf{y}$ , мы находим ведущий член разложения при  $A = 0$ :

$$U(t, \mathbf{x}) \approx \frac{\mathbf{B}\mathbf{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp[-\mathbf{x}^2/(4t)] \quad (3.7)$$

$$\mathbf{B} = 2\pi \int dy_1 \dots dy_d \mathbf{y} U(0, \mathbf{y}). \quad (3.8)$$

Выражения (3.5,3.7) являются аналогами мультипольного разложения (поля точечного заряда и поля точечного диполя) в электростатике.

Подобная процедура, связанная с пространственным Фурье-преобразованием, может быть проделана и для уравнения Шрёдингера (3.2). В результате мы находим выражение

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi i t)^{d/2}} \exp \left[ i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t} \right] \Psi(0, \mathbf{y}), \quad (3.9)$$

аналогичное (3.4). Однако имеется и существенное различие между выражениями (3.4) и (3.9). В то время как не существует интегрального представления, позволяющего восстановить  $U(0, \mathbf{x})$  по  $U(t, \mathbf{x})$ , выражение (3.9) допускает обращение:

$$\Psi(0, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(-4\pi i t)^{d/2}} \exp \left[ -i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t} \right] \Psi(t, \mathbf{y}).$$

Это связано с различным характером процессов, описываемых уравнениями (3.1) и (3.2). Уравнение диффузии (3.1) описывает диссипативный процесс, ведущий к размыванию со временем локализованных полей, смотри (3.5,3.7). Поэтому уравнение диффузии (3.1) не допускает обращения времени. Уравнение же Шрёдингера (3.2) обращение времени допускает: оно инвариантно относительно замены  $t \rightarrow -t$ ,  $\Psi \rightarrow \Psi^*$ . Поэтому наряду с прямым выражением (3.9) работает и обратное ему выражение.

- Заметим, что при  $t \rightarrow 0$  функция  $U(t, \mathbf{x})$  должна переходить в  $U(0, \mathbf{x})$ . Поэтому из соотношения (3.4) следует

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t} \right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Докажите это соотношение непосредственно.

- Найти решение одномерного диффузионного уравнения для следующего начального условия:  $U(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$ . Сравните ответ с асимптотическим выражением (3.5).
- Найти асимптотическое поведение решения одномерного диффузионного уравнения для следующих начальных условий:  $U(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$ ;  $U(0, x) = x \exp[-x^2/(2l^2)]$ ;  $U(0, x) = \exp(-|x|/l)$ ;  $U(0, x) = x \exp(-|x|/l)$ ;  $U(0, x) = (x^2 + l^2)^{-1}$ ;  $U(0, x) = x(x^2 + l^2)^{-2}$ .
- Найти для уравнения Шрёдингера асимптотические выражения, аналогичные (3.5,3.7).
- Найти решения одномерного уравнения Шрёдингера для следующих начальных условий:  $\Psi(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$ ;  $\Psi(0, x) = x \exp[-x^2/(2l^2)]$ .
- Найти аналог представления (3.4) для одномерного поля  $U(t, x)$ , динамика которого в Фурье-представлении задается (необратимым) уравнением  $\partial \tilde{U} / \partial t = -q \tilde{U}$ .

#### 4. ДИНАМО

Эффект динамо заключается в нарастании со временем магнитного поля в потоке проводящей жидкости (электролита, плазмы). Рассмотрим это явление в случае малой амплитуды магнитного поля, когда обратным влиянием магнитного поля на гидродинамическое движение можно пренебречь. Тогда эволюцию магнитного поля можно изучать на фоне заданного гидродинамического движения, которое характеризуется полем скорости  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ .

В случае хорошо проводящей среды для описания эффекта динамо можно применять уравнение “вмороженности” магнитного поля в проводящую жидкость

$$\partial_t \mathbf{B} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v}, \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{B}$  – индукция магнитного поля. В уравнении (4.1) подразумевается условие несжимаемости жидкости  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ . В этом случае условие бездивергентности  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  совместно с уравнением (4.1), так как из него следует “закон сохранения”

$$\partial_t (\operatorname{div} \mathbf{B}) + (\mathbf{v} \nabla) (\operatorname{div} \mathbf{B}) = 0.$$

Уравнение (4.1) содержит только первые производные и потому может быть решено методом характеристик, смотри раздел 17 А. Характеристики  $\mathbf{x}(t)$  определяются уравнением

$$\partial_t \mathbf{x} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}). \quad (4.2)$$

Эти характеристики называются Лагранжевыми траекториями, вдоль которых движутся частицы жидкости. Лагранжевы траектории можно параметризовать, скажем, начальным положением (при  $t = 0$ ) точки  $\mathbf{x}$ . Для стационарного потока Лагранжевы траектории называются также линиями тока. Вдоль данной характеристики магнитная индукция изменяется в соответствии с уравнением

$$\frac{d}{dt} \mathbf{B} = \hat{\sigma} \mathbf{B}. \quad (4.3)$$

здесь  $\hat{\sigma}$  – матрица, составленная из производных компонент скорости  $\mathbf{v}$ :  $\hat{\sigma} \mathbf{B} \equiv (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v}$ . Значения этих производных следует брать в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{x}(t)$ . Можно сказать, что уравнение (4.3) определяет эволюцию магнитной индукции, которая “прикреплена” к данной точке жидкости.

Формальное решение уравнения (4.3) можно записать следующим образом

$$\mathbf{B}(t) = \hat{W}(t) \mathbf{B}(0), \quad (4.4)$$

где матрица  $\hat{W}$  удовлетворяет следующему уравнению и начальному условию

$$\frac{d}{dt} \hat{W} = \hat{\sigma} \hat{W}, \quad \hat{W}(0) = 1. \quad (4.5)$$

Здесь важно, что матрица  $\hat{W}$  определяется только свойствами потока и не зависит от магнитного поля. Вообще говоря, матрицы  $\hat{W}$  различны для разных Лагранжевых траекторий.

Интуитивно ясно, что матрица  $\hat{W}$  растет со временем, что ведет к росту магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Продемонстрируем это на примере стационарного крупномасштабного движения, когда матрицу  $\hat{\sigma}$  можно считать не зависящей от времени и пространственных координат. Матрица  $\hat{\sigma}$  имеет три собственных значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Будем считать  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ . В силу условия несжимаемости  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  след матрицы  $\hat{\sigma}$  равен нулю, то есть  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ . Отсюда следует, что  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ , а знак  $\lambda_2$  остается неопределенным. Если вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  разложить по собственным векторам матрицы  $\hat{\sigma}$ , то в силу (4.4,4.5) его компоненты будут зависеть от времени пропорционально  $e^{\lambda_1 t}$ ,  $e^{\lambda_2 t}$  и  $e^{\lambda_3 t}$ , соответственно. На больших временах главной будет первая компонента, которая экспоненциально растет со временем в силу  $\lambda_1 > 0$ . Даже если  $\lambda_2 > 0$  и вторая компонента тоже экспоненциально растет со временем, в силу  $\lambda_1 > \lambda_2$  первая компонента будет доминировать.

До сих пор мы рассматривали случай общего положения, когда собственные значения матрицы  $\hat{\sigma}$  отличны от нуля. В то же время в пристеночных областях обычно образуются сдвиговые течения, для которых все собственные значения матрицы  $\hat{\sigma}$  равны нулю. Этот случай требует специального анализа. Рассмотрим для определенности двумерное сдвиговое течение, которое реализуется вблизи стенки, которая задается условием  $y = 0$ , и имеет единственную компоненту скорости  $v_x = sy$ . В этом случае матрица  $\hat{\sigma}$  имеет вид

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

то есть оба ее собственные значения равны нулю. Для этой матрицы решение уравнения (4.5) имеет вид

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} 1 & st \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Обращаясь теперь к соотношению (4.4), мы заключаем, что магнитное поле растет со временем и в сдвиговом потоке, но не экспоненциально, а гораздо медленнее – как первая степень времени.

Эффект, подобный динамо, наблюдается в полимерных растворах. В этом случае можно ввести поле  $\mathbf{B}$ , смысл которого заключается в том, что его величина определяет степень растяжения полимерных молекул, а направление определяет направление этого растяжения. Тогда (не для слишком сильных растяжений) динамика поля  $\mathbf{B}$  описывается уравнением, подобным (4.1)

$$\partial_t \mathbf{B} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} - \gamma \mathbf{B}. \quad (4.8)$$

Разница заключается в последнем члене, который описывает релаксацию растяжения полимеров ( $\gamma^{-1}$  – время релаксации).

Следует той же логике, что и раньше, мы приходим к выводу, что в стационарном крупномасштабном течении компоненты поля  $\mathbf{B}$  вдоль Лагранжевых траекторий меняются пропорционально  $e^{(\lambda_1 - \gamma)t}$ ,  $e^{(\lambda_2 - \gamma)t}$  и  $e^{(\lambda_3 - \gamma)t}$ . Таким образом, мы приходим к выводу, что при  $\lambda_1 > \gamma$  полимеры растягиваются, а при обратном соотношении – нет. (В частности, полимеры не растягиваются в сдвиговых потоках.) Это приводит к сильному эффекту в слабых полимерных растворах. В них полимеры в нерастянутом состоянии практически не оказывают влияния на свойства раствора. Но если создать в растворе достаточно сильное течение, так что  $\lambda_1$  превзойдет  $\gamma$ , то полимеры сильно растянутся, и свойства раствора существенно изменятся: в нем начнут проявляться упругие эффекты.

- Найти, как будет меняться со временем магнитное поле в двумерном стационарном сдвиговом потоке с матрицей производных скорости (4.6), если в начальный момент времени  $B_x = -y \exp(-x^2 - y^2)$ ,  $B_y = x \exp(-x^2 - y^2)$ .

## 5. КВАНТОВЫЕ ВИХРИ

Как известно, в сверхтекучей жидкости конечное число атомов находится в когерентном состоянии, за счет которого осуществляется сверхтекучее движение. В сверхтекучем гелии-4 сверхтекучая скорость  $\mathbf{v}$  следующим образом связана с фазой  $\phi$  этого когерентного состояния

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi, \quad (5.1)$$

где  $m$  – масса атома гелия. В дальнейшем мы используем систему единиц, в которой  $\hbar/m = 1$ .

Как следует из соотношения (5.1), сверхтекучая скорость является потенциальной. Однако в сверхтекучей жидкости имеются линейные дефекты, которые называются вихрями, вблизи линий которых когерентное состояние разрушено (на атомных масштабах). При обходе вокруг такой линии фаза  $\phi$  может меняться на  $2\pi$ , то есть для любого контура, охватывающего линию вихря

$$\oint dr \mathbf{v} = \pm 2\pi. \quad (5.2)$$

Вообще говоря, в правой части (5.2) может стоять  $2\pi n$ , где  $n$  – целое число. Но вихри с  $|n| > 1$  энергетически неустойчивы, разваливаясь на “элементарные” вихри с  $n = \pm 1$ . Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем только случай (5.2).

Для прямолинейного вихря, направленного вдоль оси  $Z$ , сверхтекучая скорость может быть записана



в виде

$$v_x = \mp \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \pm \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v_z = 0, \quad (5.3)$$

где знаки соответствуют вращению против часовой стрелки и по часовой стрелке, соответственно. Зависимость (5.3) связана с симметрией задачи: линии тока являются окружностями с осью  $Z$  в качестве оси симметрии. Условие же (5.2) обеспечивается тем, что скорость вращения убывает обратно пропорционально расстоянию до вихревой линии (в данном случае до оси  $Z$ ).

Скорость (5.3) имеет особенность на оси  $Z$ , где она обращается в бесконечность и на которой сосредоточена ненулевая завихренность. Нетрудно сообразить, что для скорости (5.3)

$$\text{rot } \mathbf{v} = \pm 2\pi \mathbf{n}_z \delta(x)\delta(y), \quad (5.4)$$

где  $\mathbf{n}_z$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $Z$ . Действительно, в силу теоремы Стокса именно при таком соотношении выполняется условие (5.2) для любого контура, охватывающего вихрь. Конечно, в реальности выражение (5.3) работает только до расстояний порядка атомного до оси  $Z$ , соответственно,  $\delta$ -функции в (5.4) “размазаны” на том же масштабе. Это, однако, не мешает дальнейшим формальным действиям, в которых атомный масштаб предполагается пренебрежимо малым.

Соотношение (5.4) допускает обобщение на вихрь произвольной формы и на произвольную систему вихрей. Оно имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\pi \mathbf{n} \delta_v^{(2)}(\mathbf{r}), \quad (5.5)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, направленный вдоль вихревой линии, а  $\delta_v^{(2)}(\mathbf{r})$  – “двумерная”  $\delta$ -функция, отличная от нуля только на вихревой линии. Она определяется тем, что равен единице интеграл от  $\delta^{(2)}(\mathbf{r})$  по любой поверхности, пересекающей вихревую линию и перпендикулярной ей в точке пересечения. Одно же из двух возможных направлений единичного вектора  $\mathbf{n}$  определяется направлением, в котором закручен вихрь. При наличии нескольких вихрей в правой части (5.5) должна стоять сумма по вихрям.

Соотношение (5.5) позволяет однозначно восстановить сверхтекучую скорость по форме вихрей, если в дополнение к соотношению (5.5) использовать условие несжимаемости  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ . (Напомним, что жидкость можно считать несжимаемой, если мы на некотором масштабе рассматриваем движения более медленные, чем звуковые колебания с длиной волны порядка этого масштаба.) Тогда задача формально сводится к магнитостатике, причем сверхтекучая скорость  $\mathbf{v}$  играет роль магнитного поля, а вихри в соответствии с соотношением (5.5) играют роль тонких проволок, по которым течет ток. Специфика сверхтекучей жидкости заключается в том, что этот ток

квантуется (имеет определенное значение). Магнито-статическая аналогия позволяет выписать решение уравнения (5.5), используя выражение Био-Савара-Лапласа

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int ds [\mathbf{n} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta})] |\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}|^{-3}. \quad (5.6)$$

Здесь интегрирование идет вдоль вихревой линии, причем  $ds$  – дифференциал ее длины,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, касательный к вихревой линии, а  $\boldsymbol{\zeta}(s)$  задает положение вихревой линии в пространстве. При наличии нескольких вихрей сверхтекучая скорость является суммой величин (5.6), взятых для каждого вихря, что объясняется линейностью соотношения (5.5).

Выражение (5.6) предполагает, что мы рассматриваем неограниченное пространство, причем вихри сосредоточены в его ограниченной области, вне которой сверхтекучая скорость  $\mathbf{v}$  убывает. При решении задачи в ограниченном объеме к выражению (5.6) следует добавить чисто потенциальный вклад  $\nabla\phi$ , потенциал которого в силу условия несжимаемости  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2\phi = 0$ . Потенциал  $\phi$  должен быть выбран так, чтобы удовлетворить граничным условиям на границе области, в которой рассматривается сверхтекучее движение. Например, на твердой поверхности должна быть равна нулю перпендикулярная к поверхности компонента сверхтекучей скорости (что означает нулевой сверхтекучий поток через стенку).

Вихревые линии могут быть замкнутыми. Единичный замкнутый вихрь постепенно релаксирует к форме правильной окружности. Такой круговой вихрь (вихревое кольцо), в отличие от прямого, движется. Чтобы найти скорость его движения, вычислим скорость, которая индуцируется в некоторой точке вихревой линии. Для этого воспользуемся общей формулой (5.6). Будем считать, что вихрь радиуса  $R$  лежит в плоскости  $X - Y$ , а его центр совпадает с началом координат. Вычислим скорость в точке  $R, 0, 0$ . Тогда в интеграле (5.6)  $ds = R d\varphi$ , где  $\varphi$  – полярный угол, при этом  $|\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}| = 2R \sin(\varphi/2)$  и  $|\mathbf{n} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta})| = 2R \sin^2(\varphi/2)$ . Несложно сообразить, что отлична от нуля только компонента скорости  $v_z$ , которая дается интегралом

$$v_z = \frac{1}{8R} \int \frac{d\varphi}{\sin(\varphi/2)} \approx \frac{1}{2R} \ln\left(\frac{R}{a}\right). \quad (5.7)$$

Интегрирование в (5.7) должно идти по углу  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , что формально приводит к расходимостям на обоих пределах. Следует, однако, помнить, что рассматриваемое приближение работает на масштабах больше атомного размера  $a$ , поэтому область интегрирования следует ограничить до  $a/R < \varphi < 2\pi - a/R$ . В результате получается ответ (5.7), в котором считается, что  $\ln(R/a)$  является большой величиной. Очевидно, что все точки вихревой линии движутся вдоль оси  $Z$  с одинаковой скоростью. Обобщая, вихревое кольцо движется, как целое, в направлении, перпендикулярном его плоскости, со скоростью (5.7), которая определяется его радиусом.

До сих пор мы считали, что никаких внешних воздействий на квантовые вихри нет. В то же время при конечной температуре возникает сила воздействия на вихрь, связанная с тем, что его стремится увлечь так называемое нормальное движение жидкости. В результате возникает действующая на вихрь сила, которая пропорциональна разности скорости нормального движения (нормальной скорости) и скорости движения вихря. Определим, как в такой ситуации будет двигаться вихрь. Для этого мы исходим из общего уравнения сверхтекучего движения

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}, \quad (5.8)$$

где  $\mathbf{f}$  – сила на единицу массы, приложенная к сверхтекучей компоненте. Эта сила вызывается, например, градиентом давления.

Рассмотрим для определенности прямолинейный вихрь, вихревая линия которого совпадает с осью  $Z$ . В отсутствие внешних воздействий связанная с ним сверхтекучая скорость дается выражениями (5.3), поэтому в соответствии с (5.8)  $\mathbf{f} = -(x^2 + y^2)^{-2}(x, y, 0)$ , то есть сила  $\mathbf{f}$  направлена к вихревой линии, а градиент давления, наоборот, направлен от вихревой линии. Теперь мы предположим, что на вихрь действует сила  $F$  на единицу длины, направленная вдоль оси  $Y$ . Тогда вихрь будет двигаться вдоль оси  $X$  с некоторой скоростью  $V$ , которая подлежит определению. Движение со скоростью  $V$  означает, что в выражениях (5.3) мы должны подставить  $x \rightarrow \tilde{x} = x - Vt$ . Тогда уравнение (5.8) приводит к соотношению

$$-V \partial_x \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f},$$

Здесь сила  $\mathbf{f}$ , помимо градиентной объемной части, содержит также силу, сосредоточенную на линии вихря, что можно записать, как вклад  $f_y^{sing} = F \delta(\tilde{x}) \delta(y)$ . Чтобы связать  $V$  и  $F$ , возьмем ротор от приведенного соотношения, что дает для  $z$ -компоненты ротора

$$-V \partial_x (\text{rot } \mathbf{v})_z = F \partial_x \delta(\tilde{x}) \delta(y).$$

Воспользовавшись теперь выражением (5.4), находим окончательно  $F = \mp 2\pi V$ . В инвариантном виде

$$\mathbf{F} = 2\pi(\mathbf{n} \times \mathbf{V}). \quad (5.9)$$

Это так называемая сила Магнуса.

Приведенная схема прямо обобщается на вихрь произвольной формы. Если на вихрь в данной точке действует сила  $\mathbf{F}$  на единицу длины (перпендикулярная  $\mathbf{n}$ ), то она приводит к скорости движения  $\mathbf{V} = -(2\pi)^{-1}(\mathbf{n} \times \mathbf{F})$ . Эту скорость надо прибавить к сверхтекучей скорости  $\mathbf{v}$  в той же точке, что дает скорость движения вихревой линии. Напомним, что сверхтекучая скорость  $\mathbf{v}$  определяется суммой скорости, индуцированной вихрями и скорости потенциального движения, связанного с граничными условиями.

- Получить выражение (5.3) для сверхтекучей скорости прямолинейного вихря из общей формулы (5.5).

- Найти сверхтекучую скорость на оси кругового вихря радиуса  $R$ .
- Как будут двигаться два прямых параллельных вихря, разделенных расстоянием  $R$ ? Рассмотреть два случая: когда вихри закручены в одну или в противоположные стороны.
- Найти эволюцию вихревого кольца, на который действует постоянная сила  $F$  на единицу длины в направлении, перпендикулярном плоскости кольца.

## 6. УРАВНЕНИЯ НА МЕДЛЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

В различных физических контекстах встречаются задачи, содержащие один или несколько малых параметров. В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда в задаче имеется один малый параметр, который мы обозначаем  $\epsilon$ . Особенно интересен случай, когда решение задачи при  $\epsilon = 0$  известно. Тогда решение исходной задачи можно строить в виде разложения по малому параметру  $\epsilon$ , такое разложение называется теорией возмущений. Например, в рамках теории возмущений можно обычно рассматривать взаимодействие излучения с веществом.

Если мы решаем обычные (алгебраические или трансцендентные) уравнения, содержащие малый параметр  $\epsilon$ , то конечный результат мало отличается от невозмущенного (то есть получающегося при  $\epsilon = 0$ ) решения  $x_0$ . Как правило, отклонение точного решения от решения невозмущенного уравнения (то есть уравнения, в котором  $\epsilon$  положен равным нулю) получается в виде ряда по  $\epsilon$ . Для построения этого ряда можно использовать итерационный процесс. С этой целью в члены, пропорциональные  $\epsilon$ , подставляется значение  $x_0$ , после чего находится поправка  $x_1$  к  $x_0$ . Далее уточненное значение  $x_0 + x_1$  подставляется в члены, пропорциональные  $\epsilon$ , и находится поправка  $x_2$ . Продолжая эту процедуру, мы находим разложение по  $\epsilon$  точного решения уравнения  $x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots$

- Найти первые две поправки по  $\epsilon$  к невозмущенному решению  $x_0 = 1$  уравнения  $x^2 - 1 = \epsilon x$ . Сравните результат с точным решением.

Если возмущение происходит в точке вырождения (когда несколько решений невозмущенного уравнения совпадают), то разложение решения может происходить по нецелым степеням  $\epsilon$ . Например, решения уравнения  $(x - 1)^2 = \epsilon$  имеют вид  $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\epsilon}$ . Однако даже в этих вырожденных случаях решение возмущенного уравнения при малых  $\epsilon$  близко к решению невозмущенного.

- Найти первые две поправки по  $\epsilon$  к невозмущенному решению  $x_0 = 1$  уравнения  $(x - 1)^3 = \epsilon x$ .

Подобная теория возмущений может быть развита и для динамических систем, описываемых эволюционными дифференциальными уравнениями. Однако в ряде случаев, связанных с разного рода резонансами, область применимости прямой теории возмущений оказывается ограниченной по времени, то есть точность разложения решения по  $\epsilon$  падает с ростом времени  $t$ . Чтобы повысить эту точность, следует несколько модифицировать теорию возмущений. Этой модификации и посвящена настоящая лекция.

В качестве стартового примера рассмотрим задачу Коши для гармонического осциллятора с возмущенной частотой:

$$\ddot{x} + \nu^2 x = -\epsilon \nu^2 x. \quad (6.1)$$

Будем рассматривать начальные условия  $x(0) = a$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Тогда уравнение (6.1) имеет очевидное решение

$$x(t) = a \cos(\nu t \sqrt{1 + \epsilon}), \quad (6.2)$$

которое надо сравнивать с решением невозмущенного уравнения (при  $\epsilon = 0$ )  $x_0 = a \cos(\nu t)$ . Мы видим, что при  $\nu t \epsilon \sim 1$  отклонение решения  $x(t)$  от невозмущенного решения  $x_0(t) = a \cos(\nu t)$  станет существенным:  $x(t) - x_0(t) \sim x_0(t)$ .

Будем теперь решать эту задачу по теории возмущений. В правой части уравнения (6.1) стоит малый множитель  $\epsilon$ , поэтому оно может быть использовано для формулировки итерационной процедуры: сначала мы подставляем в правую часть уравнения невозмущенное решение  $x_0(t)$ , находим первую по  $\epsilon$  поправку  $x_1(t)$ , подставляем ее в правую часть уравнения (6.1), находим вторую по  $\epsilon$  поправку  $x_2(t)$ , и так далее. Уже на первом шаге итерационной процедуры становится ясной причина аномального поведения  $x - x_0$  по времени. Действительно, при подстановке  $x_0$  в правую часть уравнения (6.1) возникает резонанс (поскольку  $x_0$  меняется с частотой  $\nu$ ), и потому поправка  $x_1$  содержит, помимо осциллирующего множителя, еще и линейный по времени. (Это так называемое секулярное или смешанное поведение.) Из-за наличия этого множителя и падает со временем точность теории возмущений. Найдем явно поправку  $x_1$ .

Для этого сначала используем решение неоднородной задачи Коши  $\ddot{x} + \nu^2 x = \phi(t)$  с начальными условиями  $x(0) = a$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , смотри раздел 1, формулы (1.10, 1.11):

$$x(t) = a \cos(\nu t) + \frac{1}{\nu} \int_0^t d\tau \sin[\nu(t - \tau)] \phi(\tau). \quad (6.3)$$

Подставляя сюда  $\phi = -\epsilon \nu^2 x$ , находим уравнение

$$\begin{aligned} x(t) - a \cos(\nu t) &= -\epsilon \nu \sin(\nu t) \int_0^t d\tau x(\tau) \cos(\nu \tau) \\ &+ \epsilon \nu \cos(\nu t) \int_0^t d\tau x(\tau) \sin(\nu \tau), \end{aligned} \quad (6.4)$$

эквивалентное исходному (6.1). Теперь мы можем найти  $x_1$ , просто подставив  $x_0$  в правую часть (6.4). Беря возникающие при этом интегралы, находим

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} a \epsilon \nu \sin(\nu t). \quad (6.5)$$

Таким образом, мы убеждаемся, что прямая теория возмущений работает только на временах  $t \ll \nu^{-1} \epsilon^{-1}$ .

- Получить следующую по  $\epsilon$  итерацию решения уравнения (6.1), работающую на временах  $t \lesssim \nu^{-1} \epsilon^{-2}$ , и сравнить ее с точным решением.

С другой стороны, как видно из точного решения (6.2), при любом  $t$  решение уравнения (6.1) можно записать в виде  $x(t) = A \cos(\nu t + \phi)$ , где  $A$  и  $\phi$  – некоторые зависящие от времени параметры. Подставляя выражение  $x(t) = A \cos(\nu t + \phi)$  в исходное уравнение (6.1), и приравнявая коэффициенты при синусе и косинусе, находим систему уравнений

$$\ddot{A} - (2\nu \dot{\phi} + \dot{\phi}^2) A = -\epsilon \nu^2 A, \quad (6.6)$$

$$2(\nu + \dot{\phi}) \dot{A} + \ddot{\phi} A = 0, \quad (6.7)$$

эквивалентную исходному уравнению (6.1).

Система уравнений (6.6, 6.7) имеет решение  $A = \text{const}$ ,  $\dot{\phi} = \text{const}$ . В главном по  $\epsilon$  порядке уравнение (6.6) дает  $\dot{\phi} = \epsilon \nu / 2$ , то есть решение имеет вид  $x = a \cos(\nu t + \epsilon \nu t / 2)$ . Сравнивая этот ответ с выражением (6.2), мы заключаем, что найденное приближенное решение отклоняется от точного решения только на временах порядка  $\nu^{-1} \epsilon^{-2}$ , что существенно улучшает точность по сравнению с прямой теорией возмущений. Более того, решение полного уравнения на производную от фазы  $2\nu \dot{\phi} + \dot{\phi}^2 = \epsilon \nu^2$  эквивалентно точному решению.

Спрашивается, что же позволило столь радикально повысить точность теории возмущений? Для этого вернемся к уравнению (6.1) и заметим, что  $A \cos(\nu t + \phi)$  с постоянными (не зависящими от времени)  $A$  и  $\phi$  являются общим решением невозмущенного уравнения. При включении возмущения (члена с  $\epsilon$ ) решение сохраняет свой вид, но параметры  $A$  и  $\phi$  становятся функциями времени, они испытывают медленную систематическую эволюцию на больших временах, то есть  $\dot{A}/A$  и  $\dot{\phi}$  являются малыми величинами в сравнении с частотой  $\nu$ . Уравнения для  $A$  и  $\phi$  не содержат никаких осциллирующих множителей, и потому их решение не чувствительно к резонансу и дает более точное приближение, чем прямая теория возмущений. Это наблюдение может быть обобщено. Для решения уравнения, в котором имеется резонансное возмущение, надо взять сначала решение невозмущенного уравнения, а затем сделать входящие в него параметры медленными функциями времени, динамика которых определяется возмущением. Такая стратегия позволит в рамках разложения по  $\epsilon$  получить гораздо большую точность, чем прямая теория возмущений.

Продемонстрируем на нескольких примерах, как работает эта логика. Рассмотрим нелинейную задачу:

$$\ddot{x} + \nu^2 x = -\epsilon x^3. \quad (6.8)$$

Найдем ее приблизительное решение, скажем, с теми же начальными условиями  $x(0) = a$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Как и раньше, решение невозмущенного решения имеет вид  $x_0 = a \cos(\nu t)$ . Попытка решения уравнения (6.8) итерациями сразу показывает наличие секулярной проблемы, поскольку в разложении  $x_0^3$  по тригонометрическим функциям присутствуют члены с частотой  $\nu$ , что приводит к резонансу. Поэтому, как и раньше, прямая теории возмущений работает на конечном временном интервале, в данном случае при  $t \lesssim a^{-2} \nu^{-1} \epsilon^{-1}$ .

- Найти первую по  $\epsilon$  поправку  $x_1$  к  $x_0$  для уравнения (6.8).
- Будут ли существенно отличаться решения возмущенного и невозмущенного уравнения  $\ddot{x} + \nu^2 x = -\epsilon x^3$  при  $t \sim \nu^{-1} \epsilon^{-1} a^{-1}$ ?

Как и раньше, для формулировки улучшенной теории возмущений мы используем выражение  $x = A \cos(\nu t + \phi)$ , которое диктуется невозмущенным уравнением. Подставляя это выражение в правую часть уравнения (6.8) и приравнявая к нулю коэффициенты при  $\cos(\nu t + \phi)$  и  $\sin(\nu t + \phi)$ , мы находим

$$\ddot{A} - (2\nu\dot{\phi} + \dot{\phi}^2)A = -\frac{3}{4}\epsilon A^3, \quad (6.9)$$

$$2(\nu + \dot{\phi})\dot{A} + \ddot{\phi}A = 0, \quad (6.10)$$

вместо (6.6,6.7). Обратим внимание на то, что система (6.9,6.10) уже не эквивалентна уравнению (6.8), поскольку при подстановке  $x = A \cos(\nu t + \phi)$  в правую часть уравнения (6.8) помимо члена, пропорционального  $\cos(\nu t + \phi)$ , возникает член, пропорциональный  $\cos(3\nu t + 3\phi)$ , который порождает дополнительную поправку к  $x$ . Однако в силу нерезонансного характера  $\cos(3\nu t + 3\phi)$  порождаемая им поправка к  $x$  оказывается малой (при малом  $\epsilon$ ) на всех временах. Поэтому мы пренебрегаем этой поправкой.

В ведущем порядке по  $\epsilon$  мы находим из системы (6.9,6.10)

$$\dot{A} = 0, \quad \dot{\phi} = \frac{3}{8\nu} A^2 \epsilon.$$

Решением этой системы является  $A = a$  и

$$x(t) \approx a \cos \left[ \left( \nu + \frac{3}{8\nu} a^2 \epsilon \right) t \right]. \quad (6.11)$$

Таким образом, решение имеет такой же вид, как и невозмущенное решение, но со сдвинутой по сравнению с невозмущенным значением  $\nu$  частотой

$$\nu + \frac{3}{8\nu} a^2 \epsilon,$$

причем сдвиг частоты зависит от амплитуды колебания  $a$ . Это явление называется нелинейным сдвигом частоты.

Рассмотрим теперь пример неавтономной системы, а именно уравнение

$$\ddot{x} + \nu^2 x = -\epsilon \cos(\Omega t)x, \quad (6.12)$$

которое описывает параметрический резонанс. При решении этого уравнения итерациями в правой части возникает резонансный член (с частотой  $\nu$ ), если  $\Omega = 2\nu$ . Проанализируем этот случай, предполагая малость  $\epsilon$ , то есть  $\epsilon \ll \nu^2$ .

Как и раньше, используем представление  $x = A \cos(\nu t + \phi)$ . Подставляя это выражение в правую часть уравнения (6.12), сохраняя только резонансные члены и приравнявая коэффициенты при  $\cos(\nu t + \phi)$  и  $\sin(\nu t + \phi)$ , находим

$$\ddot{A} - (2\nu\dot{\phi} + \dot{\phi}^2)A = -\frac{1}{2}\epsilon A \cos(2\phi), \quad (6.13)$$

$$2(\nu + \dot{\phi})\dot{A} + \ddot{\phi}A = \frac{1}{2}\epsilon A \sin(2\phi). \quad (6.14)$$

Решение этой системы имеет иной характер, чем ранее. Вне зависимости от начальных условий на больших временах угол  $\phi$  выходит на константу, близкую к  $\pi/4$ . Пренебрегая членами с  $\dot{\phi}$  и  $\ddot{\phi}$  в уравнении (6.14), находим  $4\nu\dot{A} = \epsilon A$ , то есть амплитуда  $A$  экспоненциально растет со временем:

$$A \propto \exp \left( \frac{\epsilon t}{4\nu} \right).$$

Что же касается отличия угла  $\phi$  от  $\pi/4$ , то его можно найти из уравнения (6.13), которое дает

$$\cos(2\phi) = -\frac{\epsilon}{8\nu^2},$$

что по предположению много меньше единицы.

- Найти приближенное решение уравнения (6.12), считая, что  $\Omega = 2\nu - \gamma$ , где  $\gamma \lesssim \epsilon/\nu$  — небольшая расстройка.

## 7. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Функции Бесселя естественным образом возникают в задачах теории поля, когда речь идет о зависящих от двух координат решениях уравнения типа Гельмгольца

$$(\Delta + \kappa^2) f = 0, \quad (7.1)$$

описывающего, например, различные электромагнитные и акустические явления. Однако область применимости функций Бесселя отнюдь не ограничивается этими проблемами, они оказываются полезными в

очень широком круге приложений, чем и определяется их важность.

В двумерном случае оператор Лапласа записывается в следующем виде

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \quad (7.2)$$

где  $r$  – расстояние до начала координат, а  $\varphi$  – азимутальный угол. Уравнение (7.1) допускает решение вида

$$f = g(\kappa r) \cos[n(\varphi - \varphi_0)], \quad (7.3)$$

где  $\varphi_0$  – произвольный угол. Подставляя это выражение в уравнение (7.1) и используя выражение (7.2), мы находим для  $g(z)$  уравнение

$$\frac{d^2}{dz^2} g + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} g + g - \frac{n^2}{z^2} g = 0, \quad (7.4)$$

которое называется уравнением Бесселя. Отметим, что мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (2.6).

Если функция  $f$  однозначно определена на всей плоскости  $X - Y$ , то число  $n$  в выражении (7.3), а значит и в уравнении (7.4), является целым. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением целых  $n \geq 0$ , хотя можно исследовать решения уравнения (7.4) при произвольных  $n$ , этот случай важен для ряда приложений.

Рассмотрим случай малых  $z$ ,  $z \ll 1$ . В этом случае третьим слагаемым в уравнении (7.4) можно пренебречь и мы приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2} g + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} g - \frac{n^2}{z^2} g = 0, \quad (7.5)$$

которое имеет степенные решения  $g_1 = z^n$  и  $g_2 = z^{-n}$ . Обратим внимание на причину, по которой уравнение (7.5) имеет степенные решения, и которая заключается в том, что при преобразовании  $z \rightarrow Az$ , где  $A$  – произвольный фактор, все три слагаемых в уравнении (7.5) преобразуются одинаковым образом, то есть уравнение переходит в себя. Это означает, что существуют решения уравнения (7.5), которые при преобразовании  $z \rightarrow Az$  переходят в себя с точностью до множителя, именно такими являются степенные решения  $g_1 = z^n$  и  $g_2 = z^{-n}$ .

Поскольку уравнение Бесселя (7.4) не обладает указанным свойством симметрии уравнения (7.5), его решение не может быть степенным. Тем не менее решения  $g_1 = z^n$  и  $g_2 = z^{-n}$  определяют поведение произвольного решения уравнения Бесселя (7.4) при малых  $z$ . Обратим внимание на то, что  $g_2$  сингулярно в нуле, то есть стремится к бесконечности при  $z \rightarrow 0$ . Поэтому, если функция  $g$  регулярна в нуле, то ее поведение определяется  $g_1$ , то есть  $g \propto z^n$  при малых  $z$ . Это поведение с точностью до множителя определяет решение уравнения Бесселя (7.4). Такие решения,

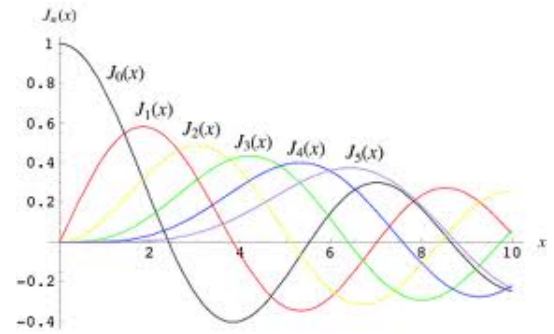


Рис. 1: Несколько первых функций Бесселя.

определяемые поведением

$$J_n(z) \approx \frac{1}{n!} \left( \frac{z}{2} \right)^n, \quad z \ll 1, \quad (7.6)$$

называются функциями Бесселя. Графики нескольких первых функций Бесселя приведены на рисунке 1.

Заметим, что при  $n = 0$  оба решения уравнения (7.5),  $g_1 = z^n$  и  $g_2 = z^{-n}$ , совпадают между собой, то есть, как говорят, имеет место вырождение. Чтобы разобраться с этим случаем, следует вернуться к уравнению (7.5), в котором надо положить  $n = 0$ . Это уравнение является уравнением первого порядка для  $dg/dz$ , решением которого, очевидно, является  $dg/dz = C_1/z$ , где  $C_1$  – произвольная константа. Интегрируя это уравнение дальше, мы находим общее решение  $g = C_2 + C_1 \ln z$ , где  $C_2$  – вторая произвольная константа. (Отметим, что возникновение логарифма типично для вырожденных случаев.) Таким образом, и при  $n = 0$  имеется два решения уравнения (7.5), одно из которых (константа) регулярно в нуле, а второе (логарифм) сингулярно. Выражение (7.6) при  $n = 0$  определяет функцию, которая является регулярной в нуле, и потому естественно рассматривать ее наряду с остальными функциями Бесселя.

Уточним теперь поведение функций Бесселя при малых  $z$ , сформулировав их разложение по  $z$ . Для этого перепишем уравнение Бесселя (7.4), как

$$\frac{d^2}{dz^2} g + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} g - \frac{n^2}{z^2} g = -g, \quad (7.7)$$

и запишем функцию Бесселя в виде

$$J_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{z}{2} \right)^n + \delta J_n,$$

где  $\delta J_n$  – дополнительный вклад. Подстановка этого выражения в уравнение (7.7) дает

$$\frac{d^2}{dz^2} \delta J_n + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \delta J_n - \frac{n^2}{z^2} \delta J_n = -\frac{1}{n!} \left( \frac{z}{2} \right)^n - \delta J_n. \quad (7.8)$$

Отметим, что главный член (7.6) исчез в левой части уравнения (7.8), поскольку он является решением

уравнения (7.5). Опуская вклад  $\delta J_n$  в правой части уравнения (7.8) и решая оставшееся уравнение, мы находим

$$\delta J_n = -\frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2}. \quad (7.9)$$

Мы видим, что выражение (7.9) содержит лишнюю степень 2 по сравнению с основным членом (7.6), то есть действительно является малой поправкой при малых значениях  $z$ .

Можно продолжить начатую итерационную процедуру, находя следующие поправки к  $\delta J_n$ , то есть представив его в виде

$$\delta J_n = \delta J_n^{(1)} + \delta J_n^{(2)} + \dots,$$

где  $\delta J_n^{(1)}$  определяется выражением (7.9), а связь между поправками определяется уравнением

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \frac{n^2}{z^2}\right) \delta J_n^{(m+1)} = -\delta J_n^{(m)}.$$

В результате мы получаем следующий ряд для функций Бесселя

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}. \quad (7.10)$$

Отметим, что это ряд по целым степеням  $z$ , который содержит только четные или только нечетные степени  $z$ , в зависимости от четности  $n$ .

Мы получили решение (7.10) уравнения Бесселя (7.4) в виде степенного ряда. Этот ряд абсолютно сходится при всех действительных  $z$ , поскольку отношение коэффициентов при степенях  $(z/2)^{n+2m+2}$  и  $(z/2)^{n+2m}$  равно  $-[(m+2)(m+1)(n+m+2)(n+m+1)]^{-1}$ , то есть стремится к нулю с ростом  $m$ . Таким образом, ряд (7.10) определяет функцию Бесселя при всех действительных  $z$ . Более того, он определяет и функцию комплексного переменного, которая получается аналитическим продолжением  $J_n(z)$  с действительных  $z$ . Поскольку ряд (7.10) является абсолютно сходящимся, то функция  $J_n(z)$  не имеет особенностей на всей плоскости комплексного переменного  $z$ . В то же время бесконечность является существенной особенностью точкой функции Бесселя  $J_n(z)$ .

Используя разложение в ряд (7.10), можно получить рекуррентные соотношения, связывающие функции Бесселя различного порядка между собой. Прямая подстановка и сравнение коэффициентов при степенях  $z$  позволяет проверить следующие соотношения

$$\frac{d}{dz} [z^n J_n(z)] = z^n J_{n-1}(z), \quad (7.11)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{J_n(z)}{z^n} = -\frac{J_{n+1}(z)}{z^n}. \quad (7.12)$$

В частности,  $dJ_0/dz = -J_1$ . Удобно считать, что  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ . Тогда соотношения (7.11,7.12)

могут использоваться как при положительных, так и при отрицательных  $n$ . Исключая из соотношений (7.11,7.12) производную  $dJ_n/dz$  либо  $J_n$ , мы находим рекуррентные соотношения и правила дифференцирования

$$\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z). \quad (7.13)$$

$$\frac{d}{dz} J_n(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)]. \quad (7.14)$$

Справедливо тождество

$$\exp\left[\frac{z}{2}(t-1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n, \quad (7.15)$$

где подразумевается то же правило  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ . Тождество (7.15) можно проверить, разлагая экспоненту в ряд и собирая коэффициенты при степенях  $t$ , которые сведутся к рядам (7.10). Другим способом доказательства соотношения (7.15) является использование тождества

$$\left\{ \left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + 1\right) - \frac{1}{z^2} \left(t^2 \frac{d^2}{dt^2} + t \frac{d}{dt}\right) \right\} \exp\left[\frac{z}{2}(t-1/t)\right] = 0,$$

которое проверяется непосредственно. Применяя стоящий здесь в фигурных скобках дифференциальный оператор к разложению  $\exp[(z/2)(t-1/t)]$  в ряд Лорана по  $t$ , мы находим, что его коэффициенты удовлетворяют уравнению Бесселя (7.4), в соответствии с соотношением (7.15).

Подставляя в соотношение (7.15)  $t = \exp(i\theta)$ , мы находим

$$\exp(iz \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) \exp(in\theta), \quad (7.16)$$

что является разложением в ряд Фурье стоящей слева функции. Выписывая обратное преобразование Фурье, мы находим

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \exp(iz \sin \theta - in\theta) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \cos(z \sin \theta - n\theta), \end{aligned} \quad (7.17)$$

где мы воспользовались тем, что мнимая часть первого интеграла равна нулю из-за того, что мнимая часть  $\exp(iz \sin \theta - in\theta)$  антисимметрична по  $\theta$ , и воспользовались тем, что косинус является четной функцией. Отметим, что выражение (7.17) автоматически приводит к соотношению  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ .

Соотношение (7.17) позволяет найти асимптотическое поведение функций Бесселя при больших значениях  $z$ . В этом случае работает приближение стационарной фазы, которая получается из условия равенства нулю производной аргумента косинуса по  $\theta$  в выражении (7.17), что дает  $z \cos \theta = n$ . Таким образом, в

силу большого значения  $z$  стационарная фаза близка к  $\pi/2$  (что предполагает неравенство  $z \gg n$ ). Используя выражение для приближения стационарной фазы (17.6), находим

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (7.18)$$

Таким образом,  $J_n(z)$  стремится к нулю при  $z \rightarrow \infty$ .

Введем функции  $f(\lambda, z) = \sqrt{z} J_n(\lambda z)$ . Эти функции вследствие (7.4) удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{n^2 - 1/4}{z^2}\right) f = -\lambda^2 f. \quad (7.19)$$

Обратим внимание на то, что здесь стоит оператор Штурма-Лиувилля (2.6) с  $Q = 0$ . Прямым следствием уравнения (7.19) является

$$f(\lambda, z) f''(\mu, z) - f''(\lambda, z) f(\mu, z) = (\lambda^2 - \mu^2) f(\lambda, z) f(\mu, z).$$

Интегрируя это соотношение на интервале от нуля до единицы, мы находим

$$\int_0^1 dz f(\lambda, z) f(\mu, z) = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} [f(\lambda, 1) f'(\mu, 1) - f'(\lambda, 1) f(\mu, 1)].$$

Перепишем это соотношение в терминах функций Бесселя

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz z J_n(\lambda z) J_n(\mu z) \\ &= \frac{J_n(\lambda) \mu J_n'(\mu) - J_n(\mu) \lambda J_n'(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2} \\ &= \frac{J_n(\lambda) \mu J_{n+1}(\mu) - J_n(\mu) \lambda J_{n+1}(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

где мы использовали соотношение (7.12). Устремляя здесь  $\mu \rightarrow \lambda$ , раскрывая получившуюся неопределенность по правилу Лопиталя, мы находим

$$\int_0^1 dz z J_n^2(\lambda z) = \frac{1}{2} [J_{n+1}^2(\lambda) - J_n^2(\lambda)] + \frac{n}{\lambda^2} J_n(\lambda) J_{n+1}(\lambda), \quad (7.21)$$

где мы использовали соотношения (7.11, 7.12).

Рассмотрим граничную задачу, когда функция  $f$  подчиняется уравнению (7.19), ее значение при  $z = 1$  равно нулю и она регулярна в нуле. В этом случае из набора  $f(\lambda, z)$  следует выделить функции с  $\lambda = \gamma_k$ , где  $\gamma_k$  — нули функции Бесселя  $J_n$ :  $J_n(\gamma_k) = 0$ . Обозначим эти функции  $f_k$ ,  $f_k(z) = \sqrt{z} J_n(\gamma_k z)$ . Как следует из уравнения (7.20), функции  $f_k$  ортогональны:  $\int_0^1 dz f_k(z) f_m(z) = 0$ , если  $k \neq m$ . Впрочем, это свойство следует также и из самосопряженности оператора в левой части уравнения (7.19) на классе функций

$f_k$  (с нулевыми условиями на границе). Нормировку функций  $f_k$  можно найти из соотношения (7.21), которое для  $\lambda = \gamma_k$  дает

$$A_k = \int_0^1 dz z J_n^2(\gamma_k z) = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\gamma_k). \quad (7.22)$$

Функции  $f_k$  составляют полный набор для класса функций, обращающихся в ноль при  $z = 1$ . Поэтому такие функции можно разложить в ряд:

$$F(z) = \sum_k C_k \sqrt{z} J_n(\gamma_k z), \quad (7.23)$$

$$C_k = A_k^{-1} \int_0^1 dz \sqrt{z} J_n(\gamma_k z) F(z). \quad (7.24)$$

- Доказать правила дифференцирования (7.14), исходя из соотношения (7.17).

- Построить разложение в ряд (7.10), исходя из соотношения (7.17).

- Найти асимптотическое выражение функции Бесселя при больших по абсолютной величине отрицательных  $z$ .

- Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp(-az) J_0(z).$$

- Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp(-az) J_1(z).$$

Указание: воспользоваться соотношением  $dJ_0/dz = -J_1$ .

- Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz z \exp(-p^2 z^2) J_0(z).$$

- Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \frac{J_2(z)}{z^2}.$$

- Разложить функцию  $\sqrt{z} J_1(z) - z^{3/2} J_1(1)$  на интервале  $(0, 1)$  в ряд по  $\sqrt{z} J_1(\gamma_k z)$  (то есть найти коэффициенты этого разложения).

## 8. ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА

При решении задач теории поля или квантовой механики зачастую возникают случаи, когда описывающие поле уравнения обладают симметрией относительно вращений вокруг некоторой точки. В этом случае задача допускает разделение переменных. Поясним это понятие на примере решения уравнения Шрёдингера для частицы массы  $m$ , помещенной в так называемое центрально-симметричное поле, потенциал которого  $U$  зависит только от расстояния  $r$  до некоторой точки, в которую мы поместим начало координат. Тогда уравнение Шрёдингера для квантового состояния с энергией  $E$  имеет следующий вид

$$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \Psi = 0. \quad (8.1)$$

Здесь  $\Psi$  – волновая функция частицы,  $\hbar$  – постоянная Планка, а  $\theta$  и  $\varphi$  – азимутальный и полярный углы в сферической системе координат, связанной с выбранной точкой.

Уравнение (8.1) допускает разделение переменных, то есть его решение можно искать в виде произведения

$$\Psi = R(r) \exp(im\varphi) P(\cos \theta), \quad (8.2)$$

а функция  $P$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0. \quad (8.3)$$

Число  $m$  должно быть целым, поскольку волновая функция  $\Psi$  должна быть периодической функцией  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Число  $n$  также должно быть целым и  $n \geq |m|$ , поскольку только в этом случае функция  $\Psi$  может быть регулярной функцией углов. Общее решение уравнения (8.1) в силу его линейности представляется в виде суперпозиции (суммы) членов вида (8.2).

Сначала мы проанализируем простейший случай  $m = 0$ . В этом случае уравнение (8.3) сводится к

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + n(n+1)P = 0, \quad (8.4)$$

где  $0 < \theta < \pi$ . Обозначая  $\mu = \cos \theta$ , мы переписываем уравнение (8.4) в виде

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} P \right] + n(n+1)P = 0, \quad (8.5)$$

где  $-1 < \mu < 1$ . Это уравнение переписывается в виде  $P'' - 2\mu(1 - \mu^2)^{-1}P' + n(n+1)(1 - \mu^2)^{-1}P = 0$  (где штрих обозначает производную по  $\mu$ ), то есть мы имеем дело с оператором Штурма-Лиувилля (2.6).

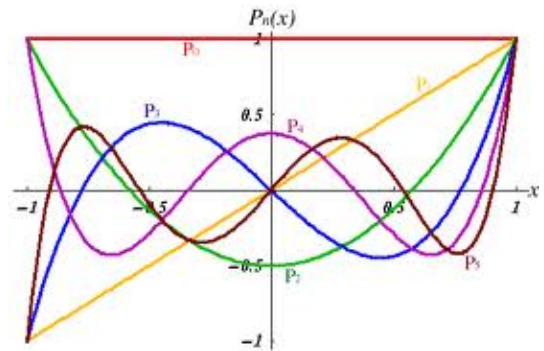


Рис. 2: Несколько первых полиномов Лежандра.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что одним из решений уравнения (8.5) являются полиномы Лежандра  $P_n(\mu)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , которые определяются следующим образом

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n. \quad (8.6)$$

Функция  $P_n(\mu)$  является полиномом  $n$ -го порядка, симметричным по  $\mu$  при четных  $n$  и антисимметричным по  $\mu$  при нечетных  $n$ . Отметим также равенство  $P_n(1) = 1$ . Первые три полинома Лежандра равны

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1). \quad (8.7)$$

Графики нескольких первых полиномов Лежандра приведены на рисунке 8.6.

Полиномы Лежандра удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(n+1)P_{n+1}(\mu) - (2n+1)\mu P_n(\mu) + nP_{n-1}(\mu) = 0, \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} (\mu^2 - 1) \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) &= n[\mu P_n(\mu) - P_{n-1}(\mu)] \\ &= \frac{n(n+1)}{2n+1} [P_{n+1}(\mu) - P_{n-1}(\mu)], \end{aligned} \quad (8.9)$$

которые проверяются непосредственно, исходя из определения (8.6). Соотношение (8.8) называется рекуррентным, оно позволяет последовательно получать явные выражения для полиномов Лежандра все большего порядка, исходя из первых двух членов в (8.7). Соотношения (8.9) позволяют свести производные от полиномов Лежандра к комбинации самих этих полиномов.

Полиномы Лежандра являются коэффициентами разложения в ряд по  $t$  функции  $(1 - 2t\mu + t^2)^{-1/2}$ , которая называется производящей функцией. Выпишем это разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2t\mu + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \tilde{P}_n(\mu)$$

Воспользуемся тождеством

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \mu \left( 2t \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) + \left( t^2 \frac{\partial}{\partial t} + t \right) \right] \frac{1}{\sqrt{1 - 2t\mu + t^2}} = 0,$$



которое легко проверяется непосредственно. Для коэффициентов разложения  $\tilde{P}_n(\mu)$  это тождество эквивалентно рекуррентному соотношению (8.8). Кроме того, совпадение первых двух членов разложения,  $\tilde{P}_0$  и  $\tilde{P}_1$ , с  $P_0$  и  $P_1$  (8.7) легко проверяется непосредственно. Отсюда следует совпадение всех членов разложения  $\tilde{P}_n(\mu)$  с  $P_n(\mu)$ , поскольку рекуррентное соотношение (8.8) позволяет однозначно построить все высшие полиномы из первых двух. Аналогично анализируется разложение производящей функции по обратным степеням  $t$ . В результате мы приходим к соотношениям

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t\mu+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n-1} P_n(\mu). \quad (8.10)$$

Первый из этих рядов сходится при  $|t| < 1$ , а второй – при  $|t| > 1$ , если  $\mu$  – действительное число и  $|\mu| < 1$ .

Соотношение (8.10) можно использовать для получения интегрального представления для полиномов Лежандра. Воспользовавшись теоремой о вычете, мы находим из соотношения (8.10)

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dt}{t^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{1-2t\mu+t^2}},$$

где интеграл идет против часовой стрелки по небольшому замкнутому контуру, охватывающему начало координат. Корень квадратный имеет точки ветвления по  $t$  при  $t_{\pm} = \mu \pm i\sqrt{1-\mu^2}$ , которые лежат на единичной окружности, если  $\mu$  – действительное число и  $|\mu| < 1$ . Эти точки ветвления можно представить в виде  $t_{\pm} = \exp(\pm i\theta)$ , где  $\mu = \cos\theta$ . Таким образом, разрез функции  $(1-2t\mu+t^2)^{-1/2}$  можно провести вдоль дуги единичной окружности в плоскости  $t$ , которая определяется условиями  $\theta < \vartheta < 2\pi - \theta$ , где  $\theta$  предполагается лежащим в интервале  $0 < \theta < \pi$ , а  $\vartheta$  – аргумент  $t$ . Деформируя теперь контур интегрирования в приведенном выше интеграле так, чтобы он “сел” на разрез, мы находим следующее интегральное представление

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} d\vartheta \frac{\sin[(n+1/2)\vartheta]}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\vartheta)}}. \quad (8.11)$$

Интегральное представление (8.11) позволяет найти асимптотическое выражение для полиномов Лежандра при больших  $n$ . В этом случае в силу быстрой осцилляции  $\sin[(n+1/2)\vartheta]$  главный вклад в интеграл набирается вблизи нижнего предела интегрирования из-за знаменателя в (8.11). Подставляя  $\vartheta = \theta + x$ , раскладывая по  $x$  подынтегральное выражение и устремляя затем верхний предел интегрирования к бесконечности, мы находим

$$P_n(\cos\theta) \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\sin[(n+1/2)(\theta+x)]}{\sqrt{2\sin\theta x}}. \quad (8.12)$$

Вычисляя здесь интеграл по  $x$ , мы находим асимптотическое выражение

$$P_n(\cos\theta) \approx \frac{2 \cos[(n+1/2)\theta - \pi/4]}{\sqrt{(2n+1)\pi \sin\theta}}. \quad (8.13)$$

Выражение (8.13) можно получить также методом WKБ (смотри ниже), который работает как раз при больших  $n$ . Чтобы применить этот метод, перепишем уравнение (8.4) в терминах переменной  $t = \ln \tan(\theta/2)$ . Тогда оно принимает вид уравнения (17.12):

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + \frac{n(n+1)}{\cosh^2 t} P = 0. \quad (8.14)$$

Таким образом

$$p = i(n+1/2)/\cosh t = i(n+1/2)\sin\theta, \\ S = \int dt p(t) = i(n+1/2)\theta,$$

где мы подставили  $\sqrt{n(n+1)} \approx n+1/2$ . При больших  $n$  выполняется неравенство  $dp/dt \ll p^2$ , что оправдывает применение метода WKБ. Суммируя теперь два множителя (17.13), мы и получаем выражение (8.13). Разумеется, приведенным методом невозможно получить общий множитель и сдвиг фазы.

Рассмотрим теперь произвольное решение уравнения (8.5), регулярное в точке  $\mu = 1$ , когда оно разлагается в ряд Тейлора по  $x = \mu - 1$ . Перепишем уравнение (8.5) в терминах переменной  $x$ :

$$(2x+x^2)P'' + 2(1+x)P' - n(n+1)P = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по  $x$ . Подставляя в это выражение разложение в ряд по  $x$ ,  $P = \sum_k p_k x^k$ , мы находим рекуррентное соотношение

$$2(k+1)^2 p_{k+1} = [n(n+1) - k(k+1)] p_k.$$

Таким образом, при целом  $n$  цепочка обрывается на  $k = n$ , и решение оказывается конечным полиномом, который (с точностью до множителя) совпадает с  $P_n(\mu)$ . Если же  $n$  не является неотрицательным целым числом, то в разложении присутствуют все степени  $x$ . В пределе больших  $k$  мы имеем  $p_{k+1} = -(1/2)p_k$ . Отсюда следует, что радиус сходимости этого ряда равен 2, и, более того, он приводит к простому полюсу при  $x = -2$ , то есть  $\mu = -1$ . Таким образом, мы доказали, что полиномами Лежандра исчерпываются решения уравнения (8.5), регулярные как в точке  $\mu = 1$ , так и в точке  $\mu = -1$ .

Как следует из уравнения (8.5), полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора

$$\hat{L} = \frac{d}{d\mu} (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu}, \quad (8.15)$$

который является самосопряженным на классе функций, заданных на интервале  $-1 < \mu < 1$  и остающихся

ограниченными на этом интервале, включая конечные точки. Самосопряженность оператора (8.15), то есть свойство (16.32), смотри раздел 16 D, легко проверяется интегрированием по частям. Поэтому полиномы Лежандра удовлетворяют условиям ортогональности (16.36):

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n(\mu)P_l(\mu) = 0, \quad (8.16)$$

если  $n \neq l$ . Впрочем, соотношение (8.16) можно проверить и непосредственно после подстановки выражения (8.6) и многократного интегрирования по частям. Точно также может быть найдено и условие нормировки

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n^2(\mu) = \frac{2}{2n+1}. \quad (8.17)$$

Общее соотношение (16.39) означает, что полиномы Лежандра, как полная система собственных функций оператора (8.15), конечных на интервале  $(-1, +1)$ , удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1/2)P_k(x)P_k(y) = \delta(x-y). \quad (8.18)$$

Это соотношение можно непосредственно доказать, если воспользоваться результатом задачи к настоящему разделу, в которой найдено значение суммы (8.18) при конечном числе слагаемых, когда  $k$  пробегает от 0 до  $n$ . Считая  $n \gg 1$  и пользуясь асимптотическим выражением (8.13), мы находим

$$\sum_{k=0}^n (k+1/2)P_k(x)P_k(y) \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{\sin\theta\sin\varphi}} \left\{ \frac{\sin[(n+1)(\theta-\varphi)]}{\sin(\theta/2-\varphi/2)} - \frac{\cos[(n+1)(\theta+\varphi)]}{\sin(\theta/2+\varphi/2)} \right\}, \quad (8.19)$$

где  $x = \cos\theta$ ,  $y = \cos\varphi$ . При  $n \rightarrow \infty$  первое слагаемое в фигурных скобках в (8.19) сходится к  $\delta$ -функции (смотри задачу к разделу 2), а второе стремится к нулю из-за нарастания осцилляций косинуса. В результате в пределе  $n \rightarrow \infty$  мы получаем соотношение (8.18).

Возвратимся теперь к уравнению (8.3). Его решениями, регулярными в точках  $\theta = 0, \pi$  являются так называемые присоединенные полиномы Лежандра, которые определяются следующим образом

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{1}{2^n n!} \sin^m\theta \frac{d^{n+m}}{(d\cos\theta)^{n+m}} (\cos^2\theta - 1)^n.$$

При  $m = 0$  мы возвращаемся к полиномам Лежандра (8.6). Присоединенные полиномы Лежандра обладают свойствами, во многом аналогичными свойствам полиномов Лежандра. Мы не будем обсуждать здесь эти свойства, которые можно найти в специальной литературе.

- Найти уравнение на функцию  $R(r)$ , фигурирующую в выражении (8.2).
- Найти значение  $P_{2n}(0)$ .
- Вывести соотношения (8.8,8.9), исходя из определения (8.6).
- Проверить выполнение уравнения (8.5) для полиномов Лежандра, исходя из формулы дифференцирования (8.9) и используя рекуррентное соотношение (8.8).
- Получить выражение (8.13) из (8.12).
- Доказать соотношение

$$\sum_{k=0}^n (2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1) \frac{P_n(x)P_{n+1}(y) - P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x}.$$

Указание: действовать по индукции с учетом рекуррентного соотношения (8.8).

- Найти  $\int_0^\pi d\theta P_{2n}(\cos\theta)$ ,  $\int_0^\pi d\theta \cos\theta P_{2n+1}(\cos\theta)$ .
- Найти  $\int_{-1}^1 dx x^2 P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)$ .
- Найти разложение в ряд по полиномам Лежандра  $P_n(x)$  монома  $x^k$ .

## 9. ПОЛИНОМЫ ЭРМИТА

Полиномы Эрмита естественно возникают в задаче о квантовом осцилляторе, которая является одной из базисных задач квантовой механики. Одномерная квантовая частица, движущаяся в квадратичном потенциале (это и есть осциллятор), описывается следующим стационарным уравнением Шрёдингера

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right) \Psi = E\Psi, \quad (9.1)$$

где первый член – кинетическая энергия, второй член – потенциальная энергия, а  $E$  – энергия частицы. После подстановки  $\Psi = \exp(-x^2/2)u$  уравнение (9.1) сводится к виду

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0, \quad (9.2)$$

которое мы и исследуем в дальнейшем. Отметим, что оператор в (9.2) относится к типу Штурма-Лиувилля (2.6).

Уравнение (9.2) инвариантно относительно замены  $x \rightarrow -x$  и потому имеет четные и нечетные решения. Четное решение может быть разложено в ряд по четным степеням  $x$ :

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}.$$

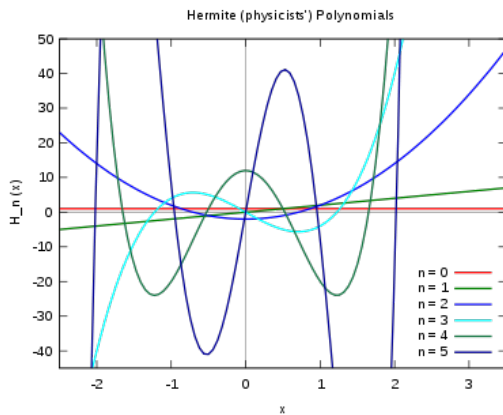


Рис. 3: Несколько первых полиномов Эрмита.

Подставляя это выражение в уравнение (9.2) и приравнявая коэффициенты при степенях  $x$ , мы находим рекуррентное соотношение

$$a_{k+1} = \frac{2k - n}{(k+1)(2k+1)} a_k,$$

которое позволяет последовательно вычислять коэффициенты разложения  $u$  в ряд по  $x$ . При больших  $k$  мы находим  $a_{k+1} \approx a_k/k$ , что дает асимптотику  $u \propto \exp(x^2)$  на больших  $x$ . Единственным исключением являются четные  $n$ , тогда ряд по  $x$  обрывается на  $k = n/2$ , и мы имеем дело с конечным полиномом. Аналогичным образом можно показать, что ряд по нечетным степеням  $x$ , представляющий нечетное решение уравнения (9.2), обрывается, если  $n$  нечетно. Таким образом, мы приходим к выводу, что уравнение (9.2) имеет решения в виде конечных полиномов при неотрицательных целых  $n$ .

Непосредственная проверка, то есть подстановка в уравнение (9.2), показывает, что при неотрицательных целых  $n$  полиномиальные решения уравнения (9.2) сводятся к полиномам Эрмита, которые определяются следующим выражением

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2). \quad (9.3)$$

Отсюда получаются следующие значения полиномов Эрмита в нуле

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n (2n-1)!!, \quad H_{2n+1}(0) = 0, \quad (9.4)$$

где  $(2n-1)!! \equiv (2n-1)(2n-3)\dots$ . Первые полиномы Эрмита записываются в следующем виде

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2. \quad (9.5)$$

Графики нескольких первых полиномов Эрмита приведены на рисунке 3.

Рассмотрим сумму

$$\sum_{n=0}^{\infty} (t^n/n!) H_n(x),$$

которая после подстановки определения (9.3) дает разложение в ряд Тейлора  $\exp[-(x-t)^2]$ . С использованием этого результата мы приходим к соотношению

$$\exp(-t^2 + 2tx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x). \quad (9.6)$$

Таким образом, функция в левой части соотношения (9.6) является производящей функцией полиномов Эрмита. Дифференцируя соотношение (9.6) по  $x$ , мы находим выражение для производной

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x). \quad (9.7)$$

Далее, беря производную по  $t$  от соотношения (9.6) и приравнявая коэффициенты при степенях  $t$ , мы получаем

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \quad (9.8)$$

Это рекуррентное соотношение позволяет последовательно вычислять полиномы Эрмита.

Для полиномов Эрмита справедливо интегральное представление

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (x+it)^n \exp(-t^2). \quad (9.9)$$

Для доказательства заметим, что представление (9.9) воспроизводит соотношение (9.7), а также удовлетворяет (9.4). Таким образом, мы можем по индукции, переходя от  $n-1$  к  $n$ , обосновать представление (9.9). Представляя подынтегральное выражение в соотношении (9.9)  $\exp[n \ln(x+it) - t^2]$  и используя для больших  $n$  метод перевала, мы находим (суммируя вклады от двух перевальных точек) выражение

$$H_n(x) \approx \sqrt{2} (2n/e)^{n/2} \exp(x^2/2) \cos\left(\sqrt{2n} x - \pi n/2\right), \quad (9.10)$$

справедливое при  $n \gg x, 1$ .

Возвратимся теперь к уравнению (9.1). Функции  $\Psi_n(x) \propto \exp(-x^2/2) H_n(x)$  составляют полный набор решений этого уравнения, стремящиеся к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ . В силу того, что оператор в левой части уравнения (9.1) является самосопряженным на этом классе функций, то  $\Psi_n$  являются ортогональными, то есть  $\int dx \Psi_n(x) \Psi_m(x) = 0$ , если  $n \neq m$ . Это означает

$$\int dx \exp(-x^2) H_n(x) H_m(x) = 0. \quad (9.11)$$

Отнормируем теперь функции  $\Psi_n(x)$  так, чтобы этот набор был ортонормированным:  $\int dx \Psi_n(x) \Psi_m(x) = \delta_{mn}$ . Для этого воспользуемся выражением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2) H_n^2(x) = 2^n n! \sqrt{\pi}. \quad (9.12)$$

Отсюда находим ортонормированный базис

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} \exp(-x^2/2) H_n(x). \quad (9.13)$$

Докажем теперь полноту базиса (9.13). Для этого воспользуемся соотношением

$$\frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} (iq)^n \exp(-q^2/4 + iqx).$$

Далее

$$\begin{aligned} \sum_n \Psi_n(x) \Psi_n(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \exp(-q^2/4 + iqx) \\ &\exp(x^2/2 + y^2/2) \sum_n \frac{(iq)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dy^n} \exp(-y^2). \end{aligned}$$

Сумма по  $n$  представляет собой ряд Тейлора, который собирается в  $\exp[-(y + iq/2)^2]$ . Подставляя этот результат в полученную выше формулу, мы находим

$$\begin{aligned} \sum_n \Psi_n(x) \Psi_n(y) &= \exp(x^2/2 - y^2/2) \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \exp[iq(x - y)] = \delta(x - y), \end{aligned}$$

что завершает доказательство полноты.

Таким образом, любую функцию  $f(x)$ , заданную на действительных  $x$  и не слишком быстро стремящуюся к бесконечности при  $x \rightarrow \pm\infty$ , можно разложить в ряд по базису (9.13):

$$f(x) = \sum_n b_n \Psi_n(x), \quad b_n = \int dx \Psi_n(x) f(x).$$

Это разложение можно переписать в терминах полиномов Эрмита

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(-x^2/2) H_n(x), \quad (9.14)$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2/2} H_n(x) f(x). \quad (9.15)$$

- Доказать, что старший член разложения  $H_n(x)$  имеет вид  $2^n x^n$ .
- Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2) H_{2n}(xy).$$

- Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-(x - y)^2] H_n(x).$$

- Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x \exp(-x^2) H_{2n-1}(xy).$$

- Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n \exp(-x^2) H_n(xy).$$

Примечание: Ответ выражается через полиномы Лежандра.

- Найти значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \exp(-x^2) \sinh(\beta x) H_{2n+1}(x).$$

- Найти значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \exp(-x^2) \cosh(\beta x) H_{2n}(x).$$

- Доказать соотношение

$$H_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2}\right) (2x)^n.$$

Указание: просуммировать по  $n$  правую часть этого соотношения с весом  $t^n/n!$  и показать, что эта сумма сводится к левой части соотношения (9.6).

- Доказать соотношение (9.12). Указание: составить комбинацию  $\exp(-t^2 + 2tx - s^2 + 2sx)$ , выразить ее через двойную сумму по полиномам Эрмита из соотношения (9.6) и проинтегрировать получившееся равенство по  $x$  с весом  $\exp(-x^2)$ . На этом пути получатся и соотношения ортогональности.

## 10. ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Вырожденная гипергеометрическая функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  (confluent hypergeometric function) возникает во многих задачах математической физики. Она является решением вырожденного гипергеометрического уравнения

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{du}{dz} - \alpha u = 0, \quad (10.1)$$

где  $\alpha$  и  $\gamma$  — произвольные параметры. Уравнение (10.1) переписывается в виде  $u'' + (\gamma/z - 1)u' - (\alpha/z)u = 0$ ,

то есть мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (2.6). Функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  характеризуется тем, что она аналитична в точке  $z = 0$  и имеет единичное значение в нуле:  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ .

Уравнение (10.1) позволяет найти коэффициенты разложения вырожденной гипергеометрической функции  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  в ряд Тейлора около точки  $z = 0$ . Вычисляя последовательно коэффициенты этого разложения из уравнения (10.1) с учетом условия  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ , мы находим

$$\Phi = 1 + \frac{\alpha z}{\gamma 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1) z^2}{\gamma(\gamma+1) 2!} + \dots, \quad (10.2)$$

с очевидным способом построения коэффициентов ряда. При отрицательных целых  $\alpha$  ряд (10.2) обрывается и  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  сводится к полиному. При больших  $n$  отношение коэффициентов при степенях  $z^n$  и  $z^{n-1}$  в разложении (10.2) стремится к  $1/n$ . Поэтому ряд (10.2) сходится на всей плоскости комплексного переменного, то есть единственной особенностью вырожденной гипергеометрической функции является бесконечность, которая является существенной особой точкой  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ .

При неотрицательных целых  $\alpha$  ряд (10.2) обрывается и вырожденная гипергеометрическая функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  сводится к полиному. В частности справедливы соотношения

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \Phi(-n, 1/2, x^2), \quad (10.3)$$

$$H_{2n+1}(x) = 2(-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} x \Phi(-n, 3/2, x^2), \quad (10.4)$$

которые сводят полиномы Эрмита к вырожденной гипергеометрической функции.

Уравнение (10.1) является дифференциальным уравнением второго порядка и потому имеет два линейно независимых решения, одним из которых является вырожденная гипергеометрическая функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ . Второе независимое решение можно найти, заметив, что если  $u$  удовлетворяет уравнению (10.1), то  $z^{\gamma-1}u$  также удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению с коэффициентами  $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$ ,  $\gamma' = 2 - \gamma$ . Таким образом, общим решением уравнения (10.1) является

$$u = c_1 \Phi(\alpha, \gamma, z) + c_2 z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \quad (10.5)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – произвольные константы. При  $\gamma = 1$  оба члена в сумме (10.5) совпадают. Этот случай требует особого рассмотрения, тогда в общем решении возникает дополнительный логарифмический множитель.

Уравнение (10.1) является дифференциальным уравнением, в котором переменная  $z$  входит линейно. В этом случае можно при помощи метода Лапласа (смотри ниже) найти интегральное представление решения этого уравнения. Составляем функции  $P$  и  $Q$  в соответствии с выражениями (??):  $P = \gamma t - \alpha$ ,  $Q = t(t-1)$ , и далее находим  $Z = t^{\alpha-1}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}$ .

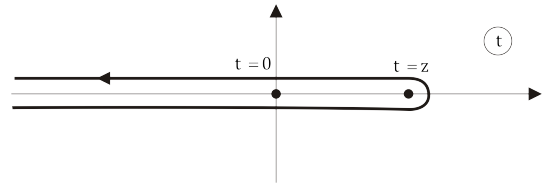


Рис. 4: Контур интегрирования в интегральном представлении вырожденной гипергеометрической функции.

Таким образом, решение уравнения (10.1) может быть записано в виде контурного интеграла

$$u = \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-1} (t-1)^{\gamma-\alpha-1}.$$

Применяя аналогичную процедуру к  $z^{\gamma-1}u$ , мы находим

$$u = z^{1-\gamma} \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-\gamma} (t-1)^{-\alpha}.$$

Производя в этом интеграле замену переменной интегрирования  $tz \rightarrow t$ , мы получаем

$$u = \int_C dt e^t t^{\alpha-\gamma} (t-z)^{-\alpha}. \quad (10.6)$$

Контур  $C$  в интеграле (10.6) естественно выбрать так, чтобы он приходил из  $-\infty$  и возвращался в  $-\infty$  (обходя каким-то образом особенности подынтегрального выражения, имеющиеся при  $t = 0$  и  $t = z$ ), тогда произведение  $ZQ \exp(t)$  на концах этого контура будет равно нулю.

Интеграл (10.6) не имеет особенностей при  $z = 0$ , если он “охватывает” обе особенности. Выберем контур  $C$ , который приходит “снизу” из  $-\infty$  огибает особенности “справа” и возвращается в  $-\infty$  “сверху”. Интеграл по этому контуру должен с точностью до множителя совпадать с вырожденной гипергеометрической функцией  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ . Мы считаем, что разрезы функций  $t^{\alpha-\gamma}$  и  $(t-z)^{-\alpha}$  идут в  $-\infty$ , а значения этих функций при положительном значении переменной положительны. Тогда значение интеграла при  $z = 0$  равно

$$\int_C dt e^t t^{-\gamma} = \frac{2\pi i}{\Gamma(\gamma)}. \quad (10.7)$$

Вспоминая, что  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ , мы находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int_C dt e^t t^{\alpha-\gamma} (t-z)^{-\alpha}. \quad (10.8)$$

При целых отрицательных значениях  $\gamma$  ряд (10.2) не определен, так как, начиная с некоторого члена, знаменатель обращается в ноль. Этому соответствует наличие полюса у  $\Gamma(\gamma)$  в соотношении (10.8). В то же время сам контурный интеграл в соотношении (10.8) остается конечным при целых отрицательных значениях  $\gamma$ .

Производя в равенстве (10.8) замену  $t \rightarrow t + z$ , мы находим соотношение

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = e^z \Phi(\gamma - \alpha, \gamma, -z). \quad (10.9)$$

Дифференцирование по  $z$  соотношения (10.8) и интегрирование по частям в контурном интеграле позволяет получить ряд соотношений:

$$\frac{d}{dz} \Phi(\alpha, \gamma, z) = \frac{\alpha}{\gamma} \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z), \quad (10.10)$$

$$\frac{z}{\gamma} \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) = \Phi(\alpha + 1, \gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z), \quad (10.11)$$

$$\alpha \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) = (\alpha - \gamma) \Phi(\alpha, \gamma + 1, z) + \gamma \Phi(\alpha, \gamma, z). \quad (10.12)$$

При больших положительных  $z$  основной вклад в контурный интеграл в (10.8) определяется окрестностью особой точки  $t = z$ . Делая замену переменных  $t = z + \zeta$  и пренебрегая зависимостью от  $\zeta$  в  $t^{\alpha-\gamma}$ , мы находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} e^z z^{\alpha-\gamma} \int_{C'} d\zeta e^{\zeta} \zeta^{-\alpha},$$

где контур  $C'$  приходит из  $-\infty$  снизу разреза, обходит особую точку  $\zeta = 0$  справа и уходит в  $-\infty$  сверху от разреза. Этот контурный интеграл сводится к обратной Гамма-функции, и мы получаем окончательно

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma}. \quad (10.13)$$

Асимптотическое выражение (10.13) справедливо и в комплексной области для  $z$  с большой положительной действительной частью.

- Доказать соотношение (10.7).
- Доказать  $\Phi(\alpha, \alpha, z) = \exp(z)$ .
- Доказать соотношения (10.10, 10.11, 10.12).
- Найти значение  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  при целых положительных  $\alpha$  и  $\gamma$ ,  $\alpha \geq \gamma$ . Указание: в этом случае интеграл (10.8) сводится к вычету в точке  $t = z$ .
- Найти выражение для полиномов, к которым сводится  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  при целых отрицательных  $\alpha$  в случае целых положительных  $\gamma$ . Указание: воспользоваться результатом предыдущей задачи и соотношением (10.9).
- Найти интеграл

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dz}{z^2 - 2\epsilon z + a^2} \Phi(\alpha, \gamma, z),$$

где  $\epsilon$  – малое положительное число. Указание: воспользоваться интегральным представлением (10.8).

- Найти второе независимое решение вырожденного гипергеометрического уравнения (10.1) при  $\gamma = 1$ . Указание: в соответствии с (10.5) при произвольном  $\gamma$  второе независимое решение можно всегда записать в виде

$$\frac{1}{1-\gamma} [z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z)],$$

здесь надо перейти к пределу  $\gamma \rightarrow 1$ .

## 11. ГАММА-ФУНКЦИЯ ЭЙЛЕРА

Довольно часто возникают случаи, когда требуется взять интеграл, содержащий комбинацию экспоненциальной и степенной функций. Такого сорта интегралы сводятся к так называемой Гамма-функции  $\Gamma(x)$ , которая была введена Эйлером. Гамма-функция определяется следующим интегралом

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}. \quad (11.1)$$

Интеграл (11.1) сходится при любом положительном  $z$ , или, если речь идет о функции комплексной переменной, при любом  $z$  с положительной действительной частью. Интеграл (11.1) легко вычисляется путем многократного интегрирования по частям при целом положительном  $z = n$ . В этом случае получается  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . Поэтому можно сказать, что Гамма-функция является обобщением факториала на случай произвольного  $n$ . Отметим также значение  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , которое может быть получено из (11.1), если перейти к интегрированию по  $\sqrt{t}$ . Однократное интегрирование по частям в выражении (11.1) дает соотношение

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (11.2)$$

которое также является обобщением соответствующего свойства факториала.

При  $z \rightarrow 0$  значение интеграла (11.1) неограниченно возрастает. Это означает, что при  $z = 0$  функция  $\Gamma(z)$  имеет особенность. Чтобы установить характер этой особенности и, более общо, продолжить аналитически  $\Gamma(z)$  на  $z$  с отрицательной действительной частью, можно использовать модификацию интеграла (11.1)

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - \exp(2\pi iz)} \int_C dt t^{z-1} e^{-t}. \quad (11.3)$$

Здесь предполагается, что  $t^z$  задано ветвью с разрезом вдоль действительной оси, причем на верхнем берегу разреза аргумент  $t^z$  равен нулю (то есть  $t^z$  действительно), а контур  $C$  обходит этот разрез, приходя из  $+\infty$  снизу разреза и уходя в  $+\infty$  сверху разреза. Если  $\operatorname{Re} z > 0$ , то контурный интеграл (11.3) может быть сведен к сумме интегралов по верхнему и нижнему

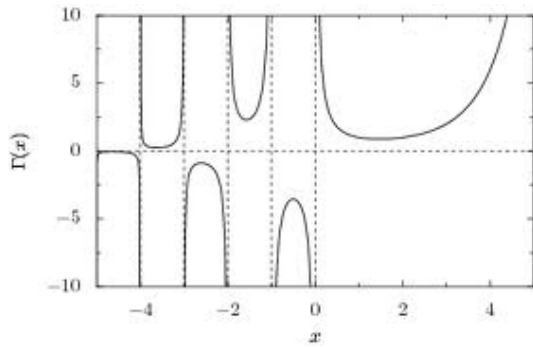


Рис. 5: Гамма-функция Эйлера.

берегам разреза, причем интеграл по верхнему берегу разреза совпадает с интегралом (11.1), а интеграл по верхнему берегу разреза отличается от интеграла (11.1) множителем  $-\exp(2\pi iz)$ . Отсюда и получается выражение (11.3).

Правая часть соотношения (11.3) определена и для  $z$  с отрицательной действительной частью, то есть осуществляет аналитическое продолжение  $\Gamma(z)$  на эту область переменной  $z$ . Контурный интеграл в (11.3) не имеет особенностей в плоскости  $z$ . Следовательно, особенности функции  $\Gamma(z)$  определяются разностью  $1 - \exp(2\pi iz)$ , которая обращается в ноль при целых (как положительных, так и отрицательных)  $z$ . При положительных целых  $z$  в ноль обращается также и контурный интеграл, то есть мы приходим к неопределенности, которая должна раскрываться по правилу Лопиталья. В любом случае,  $\Gamma(z)$  не имеет особенностей при целых положительных  $z$ , в соответствии с приведенным выше анализом. При целых отрицательных  $z$  контурный интеграл в ноль не обращается, и мы приходим к выводу, что в этих точках  $\Gamma(z)$  имеет простые полюса. Найдем вычеты в этих полюсах. При  $z = -n$  ( $n$  — целое неотрицательное) контурный интеграл в (11.3) сводится к вычету в нуле, поскольку значения подынтегральной функции на берегах разреза совпадают между собой. Вычисляя этот вычет, находим

$$\int_C dt t^{-n-1} e^{-t} = -2\pi i (-1)^n (n!)^{-1}.$$

Таким образом

$$\operatorname{res} \Gamma(-n) = (-1)^n (n!)^{-1}. \quad (11.4)$$

График зависимости Гамма-функции от своего (действительного) аргумента приведен на рисунке 5. В полюсных точках функция имеет особенности, то есть стремится к бесконечности.

Можно найти асимптотическое выражение Гамма-функции  $\Gamma(z)$  при больших положительных значениях  $z$ , воспользовавшись асимптотическим методом Лапласа (смотри ниже). Для этого в интеграле (11.1) произведем замену  $t \rightarrow tz$ , которая приводит его к

виду

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp[z(\ln t - t)],$$

то есть к виду (17.8). Стоящая в экспоненте функция  $\ln t - t$  достигает максимума в точке  $t = 1$ . Используя теперь приближение (17.9), находим

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z \exp(-z). \quad (11.5)$$

Это соотношение дает приближенное (работающее при больших  $n$ ) выражение для факториала  $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ , которое называется формулой Стирлинга. Отметим, что асимптотика (11.5) справедлива и для комплексных  $z$  при условии большого положительного значения действительной части  $z$ .

Через Гамма-функции выражается так называемый интеграл Эйлера первого рода:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (11.6)$$

где действительные части  $\alpha$  и  $\beta$  предполагаются положительными. Для доказательства соотношения (11.6) рассмотрим немного более общий интеграл

$$s^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) = \int_0^s dx x^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1}.$$

Интегрируя обе части этого соотношения по  $s$  с весом  $e^{-s}$ , мы получаем

$$\Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty ds e^{-s} \int_0^s dx x^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1}.$$

Замена переменных  $s = x + y$  сводит правую часть к произведению интегралов по  $x$  по  $y$ , которые дают произведение  $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ . Таким образом, мы приходим к соотношению (11.6).

Докажем соотношение

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (11.7)$$

Для этого запишем левую часть (11.7), как произведение интегралов

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{-z} e^{-t} \int_0^\infty ds s^{z-1} e^{-s}.$$

Произведя здесь замену  $s = t\zeta$  и взяв интеграл по  $t$ , мы находим

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta}.$$

Взятие интеграла по  $\zeta$  приводит к соотношению (11.7). Строго говоря, приведенные рассуждения справедливы для  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ . Однако принцип аналитического продолжения позволяет распространить его на произвольные  $z$ . В частности, соотношение (11.7) позволяет легко воспроизвести выражение для вычетов (11.4).

- Проверить, что при целых положительных  $z$  раскрытие неопределенности по правилу Лопиталя в выражении (11.3) дает  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .
- Найти интеграл

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^a \varphi \sin^b \varphi.$$

- Доказать, что

$$\int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Указание: переписать интеграл, как контурный, где контур идет по берегам разреза функции  $\zeta^z$ , а затем деформировать контур интегрирования, “посадив” интеграл на вычет в точке  $\zeta = -1$ .

- Получить интегральное представление для  $\Gamma^{-1}(z)$ . Указание: воспользоваться соотношением (11.7) и интегральным представлением (11.3).
- Вычислить интеграл

$$\int_0^1 dz \ln \Gamma(z).$$

- Доказать соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z).$$

- Найти  $|\Gamma(1/2 + ix)|$ , где  $x$  действительное число.

## 12. УРАВНЕНИЯ ХОПФА И БЮРГЕРСА

Уравнением Бюргерса называется уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (12.1)$$

Уравнение (12.1) получается, например, при исследовании слабо нелинейной одномерной акустической волны в системе отсчета, движущейся с линейной скоростью звука. В этом случае нелинейный по  $u$  член в уравнении (12.1) происходит из зависимости скорости звука от амплитуды звуковой волны, а член со второй производной представляет затухание звуковой волны, связанное с диссипацией. Однако область применимости этого уравнения отнюдь не ограничивается приведенным примером, уравнение Бюргерса возникает во многих физических задачах, чем и определяется его значение.

На самых больших временах любое решение уравнения (12.1), стремящееся к нулю на  $\pm\infty$  по  $x$ , стремится к нулю,  $u \rightarrow 0$ . Действительно, в силу уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dx \frac{u^2}{2} = - \int dx \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (12.2)$$

Таким образом, положительно определенная величина  $\int dx u^2$  убывает со временем и, при достаточно большом  $t$ , становится сколь угодно малым. Отсюда и следует приведенное утверждение.

Легко найти асимптотическое по времени поведение решения уравнения Бюргерса  $u$ , которое стремится к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Тогда при больших  $t$  значение  $u$  становится малым и мы можем пренебречь нелинейным членом в уравнении (12.1). В результате мы приходим к чисто диффузионному уравнению. Локализованные решения этого уравнения имеют вид

$$u \propto \frac{1}{t^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(x-x_0)^2}{4t} \right],$$

$$u \propto \frac{x-x_0}{t^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(x-x_0)^2}{4t} \right],$$

вторая асимптотика реализуется при условии  $\int dx u = 0$ .

Более интересным является обратный случай сильной нелинейности, который реализуется, если для начальных условий  $UL \gg 1$ , где  $L$  – характерный масштаб (корреляционная длина) начального состояния  $u(0, x)$ , а  $U$  – характерное значение поля  $u(0, x)$ . В этом случае начальная эволюция поля  $u$  может быть описана в пренебрежении второй производной в уравнении (12.1), когда оно сводится к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (12.3)$$

которое называется уравнение Хопфа. Это уравнение содержит только первые производные от  $u$  и линейно по этим производным. Такое уравнение может быть решено методом характеристик (смотри ниже). А именно, можно легко найти уравнения для изменения поля  $u$  вдоль специальных траекторий (характеристик):

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = u. \quad (12.4)$$

Таким образом, начальные значения поля  $u$ , не меняясь, переносятся со скоростью  $u$ . Поле  $u$  вследствие уравнений (12.4) неявно определяется из соотношений

$$x = y + ut, \quad u = u(0, y), \quad (12.5)$$

где, как и выше,  $u(0, x)$  – начальное значение поля.

Отметим, что методом характеристик можно решить и более общее уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad (12.6)$$



которое отличается от уравнения Хопфа (12.3) дополнительным членом в правой части, “накачкой”  $f$ , которая может быть произвольной функцией времени  $t$  и пространственной координаты  $x$ . Тогда вместо системы (12.4) надо решать уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(t, x), \quad \frac{dx}{dt} = u. \quad (12.7)$$

Динамика, которая описывается уравнением Хопфа, обычно приводит к возникновению особенностей в поле  $u$ . Это следует из уравнения на производную  $s = \partial u / \partial x$ , которое получается из уравнения Хопфа (12.3) после дифференцирования:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = -s^2.$$

Таким образом, мы должны решать вдоль характеристики уравнение  $ds/dt = -s^2$ , решение которого имеет вид  $s = (s_0 + t)^{-1}$ , где  $s_0$  – значение производной  $s$  при  $t = 0$ . Если  $s_0 < 0$ , то значение  $s$  обращается в бесконечность при  $t = -s_0$ . Таким образом, если в начальном профиле  $s(0, x)$  имеются участки с отрицательными значениями  $s$ , то за конечное время производная обращается в бесконечность. Быстрее всего это происходит для наибольшего по абсолютной величине значения  $s$ , которое определяется условием  $\partial s / \partial x = \partial^2 u / \partial x^2 = 0$ . Именно на характеристике, которая стартует из этой точки, которую мы обозначим  $y_0$ , впервые обращается в бесконечность  $s$ .

Проанализируем поведение решения уравнения Хопфа вблизи характеристики, стартующей из точки  $y_0$ . Раскладывая функцию  $u(0, y)$  в ряд Тейлора вблизи точки  $y_0$ , мы находим

$$u(0, y) \approx -c_1(y - y_0) + c_2(y - y_0)^3,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – положительные константы. Положительность  $c_1$  означает отрицательность  $s$  вблизи точки  $y_0$ , а положительность  $c_2$  означает, что значение  $s$  максимально по абсолютной величине в точке  $y_0$ . Далее, решая уравнения (12.5), мы находим

$$u = u_0 - c_1(x - ut - x_0 + u_0/c_1) + c_2(x - ut - x_0 + u_0/c_1)^3,$$

где мы ввели обозначение  $x_0 = y_0 + u_0/c_1$ . В этом случае в момент времени  $t = 1/c_1$ , который и является моментом, когда  $s$  обращается в бесконечность в точке  $x_0$ , приведенное соотношение сводится к

$$c_2(u - u_0)^3 = -c_1^4(x - x_0),$$

где мы опустили линейное по  $x - x_0$  слагаемое в члене с третьей степенью, как дающее малые поправки при малых  $x - x_0$ . Таким образом, мы приходим к профилю  $u - u_0$ , который пропорционален  $(x - x_0)^{1/3}$ , то есть является сингулярным в точке  $x = x_0$ . Эта сингулярность и является формальной причиной, по которой  $s$  обращается в бесконечность.

При приближении к особенности уравнение Хопфа становится неприменимым, так как растет вторая производная от  $u$ , и потому для анализа поведения поля  $u$  мы должны вернуться к исходному уравнению Бюргера (12.1). После некоторого переходного процесса вблизи точки  $x_0$  формируется специальное решение, которое движется со скоростью  $u_0$ , то есть  $\partial u / \partial t = -u_0 \partial u / \partial x$ . Подставляя это соотношение в уравнение Бюргера (12.1), мы находим затем его первый интеграл  $(u - u_0)^2 - 2\partial u / \partial x = \text{const}$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$u = u_0 - 2a \tanh[a(x - x_0)], \quad (12.8)$$

которое называют шоком. Это решение соответствует тому, что в области ширины  $a^{-1}$  поле  $u$  испытывает скачок  $4a$ . Решение (12.8) дает универсальную форму шок, которые формируются при условии  $UL \gg 1$ , тогда  $a \sim U$ . Заметим, что стационарность этого решения не противоречит сделанному выше утверждению о стремлении  $u$  к нулю по большим временам, поскольку последнее справедливо только для решений, стремящихся к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ , в то время как выражение (12.8) этому условию не удовлетворяет ни при каких значениях параметров.

Уравнение Бюргера (12.1) является в некотором смысле точно решаемым. А именно, преобразование Коула-Хопфа

$$\Psi = \exp(-h/2), \quad u = \partial h / \partial x \quad (12.9)$$

приводит его к чисто диффузионному уравнению

$$\partial \Psi / \partial t = \partial^2 \Psi / \partial x^2. \quad (12.10)$$

Решение уравнения (12.10) может быть выражено в виде интеграла от начального значения

$$\Psi(t, x) = \int \frac{dy}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left[-\frac{(x - y)^2}{4t}\right] \Psi(0, y). \quad (12.11)$$

Выражение (12.11) может быть использовано для получения ряда точных решений уравнения Бюргера. Рассмотрим в качестве примера начальное условие  $\Psi(0, x) = \cosh(ax)$ , которое соответствует выражению (12.8) с  $u_0 = x_0 = 0$ . В этом можно убедиться, производя обратное по отношению к (12.9) преобразование

$$u = -2\partial(\ln \Psi) / \partial x. \quad (12.12)$$

Подставляя выражение  $\Psi(0, x) = \cosh(ax)$  в уравнение (12.11) и вычисляя интеграл по  $y$ , мы находим  $\Psi(t, x) = \cosh(ax) \exp(a^2 t)$ . Подставляя это выражение в соотношение (12.12), мы находим то же выражение  $u = -2a \tanh(ax)$ , поскольку дополнительный множитель выпадает из ответа. Таким образом, мы другим способом убедились в том, что выражение (12.8) дает стационарное решение уравнения Бюргера.

- Решение уравнения Хопфа (12.3) с начальными условиями  $u = -c_1x + c_2x^3$ , полученное с помощью метода характеристик, можно формально продолжить и на времена  $t > c_1^{-1}$ , что приводит к неоднозначному решению  $u(x)$ . Найти область существования этой неоднозначности и значения функции  $u$  в этой области.
- Найти решение уравнения Хопфа (12.3) с начальными условиями  $u = -c_1x + c_2x^2$ .
- Найти решение уравнения (12.6) с нулевыми начальными условиями и накачкой, которая является константой  $f_0$  на интервале  $-x_0 < x < x_0$  и равна нулю вне этого интервала. Как зависит ответ от знака  $f_0$ ?
- Найти решение уравнения (12.6) с нулевыми начальными условиями и накачкой, которая равна  $h_0x$  на интервале  $-x_0 < x < x_0$  и равна нулю вне этого интервала. Как зависит ответ от знака  $h_0$ ?
- Найти решение уравнения (12.10) с начальным условием  $\Psi(0, x) = \cosh(ax) + B \cosh(bx)$ . Вычислить соответствующее поле  $u$ . Проследить, как большой шок “поедает” маленький, считая  $b > a$  и  $B \ll 1$ .
- Найти решение уравнения (12.10) с начальным условием  $\Psi(0, x) = 1 - A \exp(-x^2)$ . Вычислить соответствующее поле  $u$ .

### 13. УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА-ДЕ-ФРИЗА

Как мы уже отмечали, в общем случае решение уравнения Хопфа (12.3) приводит к формированию особенности в поле  $u$  за конечное время, и на больших временах эволюция поля  $u$  в рамках уравнения Хопфа исследована быть не может. В то же время уравнение Бюргера (12.1) дает решение эволюционной задачи для поля  $u$  на всех временах. Это связано с присутствием в уравнении Бюргера дополнительного (по сравнению с уравнением Хопфа) члена со второй производной, наличие которого приводит к устранению особенности в поле  $u$  (к которой приводит уравнение Хопфа). Для одномерной слабо нелинейной звуковой волны член со второй производной представляет диссипацию. В то же время в ряде задач более существенным оказывается другой эффект, связанный с дисперсией скорости звука, то есть с ее зависимостью от волнового вектора  $k$ . Этот эффект является бездиссипативным.

Будем считать, что диссипацией можно пренебречь, а дисперсия скорости звука существенна. В общем случае скорость звука является некоторой функцией  $k^2$ , при достаточно малых  $k$  первая зависящая от  $k$  поправка к скорости звука пропорциональна  $k^2$ . Это

означает, что к уравнению Хопфа (12.3) следует добавить член с третьей производной. В результате получается так называемое уравнение Кортевега - де Фриза (Korteweg - de Vries), каноническая форма которого записывается, как

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (13.1)$$

Это уравнение сводится к уравнению Хопфа (12.3) в пренебрежение третьей производной и после перемасштабирования поля  $6u \rightarrow u$ .

Уравнение КдФ (Кортевега - де Фриза) имеет, в частности, локализованное решение солитонного типа

$$u(t, x) = \frac{2\kappa^2}{\cosh^2[\kappa(x - 4\kappa^2t - x_0)]}, \quad (13.2)$$

где  $\kappa$  – произвольный параметр. Периодические решения уравнения КдФ являются так называемыми кноидальными волнами, описываемыми интегральными соотношениями:

$$x - ct - x_0 = \int du (2E + cu^2 - 2u^3)^{-1/2} \quad (13.3)$$

где  $c, E$  – параметры волны, определяющие её амплитуду и период.

Уравнение КдФ может быть записано в Гамильтоновой форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{\mathcal{H}, u\},$$

$$\mathcal{H} = \int dx \left[ u^3 - \frac{1}{2} (\partial u / \partial x)^2 \right], \quad (13.4)$$

$$\{u(x_1), u(x_2)\} = \delta'(x_1 - x_2). \quad (13.5)$$

Оно также может быть записано в Лагранжевом виде с действием

$$\int dt dx \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \right]. \quad (13.6)$$

Уравнение Кортевега - де Фриза имеет интегралы движения вида

$$I_n = \int dx P_n(u, \partial u / \partial x, \dots), \quad (13.7)$$

где  $P_n$  – полиномы от функции  $u$  и её пространственных производных, в частности:

$$P_0 = u, \quad P_1 = u^2, \\ P_2 = 2u^3 - (\partial u / \partial x)^2,$$

$$P_3 = 5u^4 + 5u^2 \partial^2 u / \partial x^2 + (\partial^2 u / \partial x^2)^2.$$

Поскольку число интегралов движения  $I_n$  бесконечно, можно сказать, что уравнение КдФ (13.1) является интегрируемым.

- Проверить, что  $P_3$  является интегралом движения уравнения КдФ.

#### 14. УРАВНЕНИЕ СИНУС-ГОРДОН

Уравнением синус-Гордон называют уравнение

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + \sin \varphi = 0. \quad (14.1)$$

Такого сорта уравнение возникает для динамики систем, которые описываются переменной  $\varphi$ , которая имеет смысл фазы некоторой величины и, соответственно, однозначно определена на интервале от 0 до  $2\pi$ . Удобно, однако, считать, что  $\varphi$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$  с тем, чтобы избежать скачков  $\varphi$ . При этом состояния системы, отличающиеся на  $2\pi n$  ( $n$  – целое число) физически эквивалентны.

Примером физической системы указанного типа являются проводящие одномерные цепочки, в которых при достаточно низких температурах возникает так называемая волна зарядовой плотности. Эта волна характеризуется фазой  $\varphi$ , с вариациями которой связана так называемая Фрелиховская мода, которая описывается уравнением (14.1), при подходящем выборе единиц измерения времени  $t$  и координаты  $x$  вдоль цепочки.

При небольших вариациях фазы,  $|\varphi| \ll 1$ , мы можем заменить в уравнении (14.1)  $\sin \varphi$  на  $\varphi$ . В результате мы получаем линейное уравнение, которое описывает совокупность распространяющихся мод. Делая Фурье-преобразование по времени и пространству, мы приходим для данной Фурье-компоненты к соотношению  $\omega^2 = q^2 + 1$ , где  $\omega$  – частота, а  $q$  – волновой вектор. Таким образом, частота  $\omega$  не может быть меньше единицы. В то же время групповая скорость  $\partial\omega/\partial q = q/\sqrt{q^2 + 1}$  стремится к нулю при уменьшении волнового вектора  $q$ .

Рассмотренные выше колебания относятся к малым вариациям около стационарного состояния  $\varphi = 0$  (или  $\varphi = 2\pi n$ ). В то же время уравнение (14.1) имеет, очевидно, еще одно стационарное решение  $\varphi = \pi$ . Оно является, однако, абсолютно неустойчивым. Для доказательства этого утверждения рассмотрим малые отклонения от этого состояния, которые описываются малой фазой  $\phi$ :  $\varphi = \pi + \phi$ . В линейном по  $\phi$  приближении уравнение (14.1) дает

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi - \phi = 0. \quad (14.2)$$

Переходя теперь к Фурье-представлению, мы находим  $\omega = \pm\sqrt{q^2 - 1}$ . Таким образом, при  $q < 1$  частота является чисто мнимой, и множитель  $\exp(-i\omega t)$  экспоненциально растет со временем (для соответствующего знака корня квадратного). Это означает, что даже исходно малые возмущения стационарного состояния  $\varphi = \pi$  станут со временем большими и разрушат это состояние.

Помимо тривиальных однородных стационарных решений уравнение (14.1) допускает широкий набор неоднородных стационарных решений, существование которых формально связано с неоднозначностью фазы  $\varphi$ . Рассмотрим простейшее такое решение, которое характеризуется предельным поведением  $\varphi \rightarrow 0$

при  $x \rightarrow -\infty$  и  $\varphi \rightarrow 2\pi$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Стационарное условие  $-\partial_x^2 \varphi + \sin \varphi = 0$  имеет вид уравнения Ньютона для (перевернутого) физического маятника и имеет первый интеграл (“энергии”)  $(\partial_x \varphi)^2/2 + \cos \varphi$ , который в силу граничных условий надо приравнять к единице. В результате мы приходим к уравнению  $\partial_x \varphi = 2 \sin(\varphi/2)$ , которое имеет решение

$$\varphi = 4 \arctan [\exp(x - x_0)], \quad (14.3)$$

где  $x_0$  – произвольная константа. Решение (14.3) называют кинком, а  $x_0$  является положением кинка. Из выражения (14.3) следует, что фаза  $\varphi$  меняется от 0 до  $2\pi$  в окрестности порядка единицы около  $x_0$ , а вне ее экспоненциально быстро стремится к своим предельным значениям. Легко найти решение (антикинк), которое соответствует убыванию фазы  $\varphi$  от  $2\pi$  до 0:

$$\varphi = 2\pi - 4 \arctan [\exp(x - x_0)].$$

Помимо простейшего решения (14.3), уравнение (14.1) допускает и более сложные стационарные решения. Например, бесконечный набор кинков. Для того, чтобы найти это решение, мы можем воспользоваться тем же интегралом “энергии”, которое теперь приравняем к  $1 + \epsilon$ . Тогда мы приходим к уравнению

$$\partial_x \varphi = \sqrt{2\epsilon + 4 \sin^2(\varphi/2)}, \quad (14.4)$$

которое описывает монотонно растущую при увеличении  $x$  фазу  $\varphi$ . Если  $\epsilon$  мало, то это решение соответствует бесконечной совокупности кинков, разделенных расстоянием  $\ln(1/\epsilon)$  (что справедливо, если этот логарифм является большой величиной). Если в выражении (14.4) взять отрицательный знак перед корнем, то мы получим решение с монотонно убывающей фазой.

До сих пор мы рассматривали неподвижный кинк. Но уравнение (14.1) допускает решения и в виде движущегося кинка. Чтобы найти его профиль для скорости движения  $v$ , можно подставить в уравнение (14.1) общий вид равномерно движущегося локализованного объекта  $\varphi = f(x - vt)$  и провести те же вычисления. Однако ответ можно выписать и безо всяких вычислений, воспользовавшись тем, что уравнение (14.1) является “релятивистки инвариантным”, и потому решение для движущегося со скоростью  $v$  кинка может быть получено из выражения (14.3) преобразованием Лоренца. В результате получаем

$$\varphi = 4 \arctan \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]. \quad (14.5)$$

Отсюда следует, в частности, что кинк не может двигаться со скоростью больше единицы. Аналогичным образом может быть найдено решение для движущегося антикинка:

$$\varphi = 2\pi - 4 \arctan \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right].$$

Уравнение синус-Гордон относится к классу уравнений, которые могут быть проанализированы в рамках метода обратной задачи рассеяния, который позволяет найти серию гораздо более сложных решений уравнения (14.1), чем приведенные выше решения для одиночных движущихся кинков и антикинков. Эти решения представляют собой системы движущихся с различными скоростями кинков и антикинков, которые в силу различных скоростей движения время от времени сталкиваются между собой. Замечательно, что после такого столкновения кинки расходятся и продолжают двигаться с теми же скоростями, что и до столкновения. При этом не происходит никакого изменения волн, обсуждавшихся выше.

## 15. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) описывает эволюцию волновых пакетов электромагнитных волн, звуковых волн, плазменных колебаний, волн на поверхности воды и так далее. НУШ относится к универсальным волновым уравнениям, в случае одного пространственного измерения оно имеет вид:

$$i\partial_t\psi + \beta\partial_x^2\psi + \alpha|\psi|^2\psi = 0. \quad (15.1)$$

Здесь  $\psi$  – так называемая огибающая изучаемого поля,  $\alpha, \beta$  – некоторые постоянные,  $t$  и  $x$  играют роль времени и расстояния. В случае пространства произвольной размерности  $\partial_x^2$  в (15.1) следует заменить на лапласиан. Уравнение (15.1) возникает при описании динамики квази-монохроматических волновых пакетов и учитывает слабую нелинейность и дисперсию, то есть зависимость скорости распространения волны от волнового вектора и амплитуды волны.

Приведем вывод уравнения (15.1), которое справедливо для однородной среды и в пренебрежение затуханием. В этом случае плоская монохроматическая волна для любого волнового процесса характеризуется частотой  $\omega$ , которая зависит от волнового вектора  $k$  волны и от ее амплитуды. Пусть в такой среде создан волновой пакет, который содержит частоты, слабо отличающиеся от  $k_0$ . Иными словами, в эволюции участвует узкая область  $k$ -пространства вблизи  $k_0$ . В этом случае (и с учетом слабой нелинейности) соотношение между частотой, волновым вектором и амплитудой можно записать в явном виде:

$$\omega = \omega_0 + u_0(k - k_0) + \beta(k - k_0)^2 + \alpha|\psi|^2, \quad (15.2)$$

где  $\omega_0$  – частота монохроматической волны малой амплитуды с волновым вектором  $k_0$ . Параметр  $\alpha$  можно считать независимым от  $k$ , поскольку учет этой зависимости даст лишь малые поправки к НУШ.

В пространственно-временном представлении волновой пакет представляет собой медленно промодулированную плоскую волну, то есть волну с амплитудой  $\text{Re}[\psi(t, x) \exp(ik_0x - i\omega_0t)]$ , где огибающая  $\psi(t, x)$

медленно меняется в пространстве и времени. Эта медленность означает, что характерная длина, на которой меняется  $\psi$ , много больше  $k_0^{-1}$ , а характерное время изменения  $\psi$  много больше  $\omega_0^{-1}$ . Переходя к пространственно-временному описанию волны, мы должны заменить  $\omega \rightarrow i\partial_t$ ,  $k \rightarrow -i\partial_x$ , что дает следующее уравнение эволюции для амплитуды волны

$$\begin{aligned} & i\partial_t[\psi(t, x) \exp(ik_0x - i\omega_0t)] \\ &= \left[ \omega_0 + u_0(-i\partial_x - k_0) + \beta(-i\partial_x - k_0)^2 + \alpha|\psi|^2 \right] \\ & \quad [\psi(t, x) \exp(ik_0x - i\omega_0t)]. \end{aligned}$$

Исключение экспоненты  $\exp(ik_0x - i\omega_0t)$  и переход в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью  $u_0$ :  $x \rightarrow x + u_0t$ ,  $\partial_t \rightarrow \partial_t - u_0\partial_x$ , приводит данное уравнение к виду (15.1) для огибающей  $\psi$ .

В последние десятилетия НУШ приобрело большое прикладное значение для оптоволоконных линий связи. В этом случае  $\psi(t, x)$  является огибающей электрического поля в оптическом импульсе:

$$\mathbf{E}(t, x) = \text{Re}[e\psi(t, x) \exp(ik_0x - i\omega_0t)].$$

Здесь  $x$  – координата вдоль волокна, а  $e$  – поляризация электрического поля. НУШ получается для распространяющихся вдоль волокна волновых пакетов в пренебрежение затуханием или после усреднения по масштабам большим по сравнению с расстоянием между усилителями, которые компенсируют затухание.

Если пакет распространяется в трехмерной среде, то он обычно не является строго одномерным, то есть огибающая  $\psi$  зависит не только от координаты  $x$  вдоль направления распространения пакета, но и от поперечных координат  $y$  и  $z$ . В этом случае возникает распыление волнового пакета в поперечном направлении, которое учитывается добавлением в правую часть (15.1) слагаемого  $\alpha - (\partial_y^2 + \partial_z^2)$ . Формально его можно получить, если учесть зависимость частоты волны  $\omega$  от поперечной компоненты волнового вектора:  $\omega(k) \approx \omega(k_x) + u(k_y^2 + k_z^2)/(2k)$ , где  $u = \partial\omega/\partial k$  – групповая скорость. (Это соотношение справедливо для изотропной среды, но и для анизотропной среды можно получить нечто подобное.) Выбирая подходящий масштаб по координатам  $x$  и  $y$ , можно добиться того, чтобы в НУШ возник лапласиан.

Изменяя масштабы измерения времени и координаты, можно менять соотношения между коэффициентами при нелинейном и дисперсионном слагаемых НУШ, но не их относительный знак. Поэтому НУШ может быть приведено к двум каноническим типам:

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + 2|\psi|^2\psi = 0 \quad (15.3)$$

и

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi - 2|\psi|^2\psi = 0. \quad (15.4)$$

Мы видим, что оба этих уравнения имеют вид квантовомеханического уравнения Шрёдингера с потенциалом, пропорциональным  $-2|\psi|^2$  в случае (15.3) и

$+2|\psi|^2$  для (15.4). Поскольку знак  $-2|\psi|^2$  соответствует притягивающему потенциалу, то этот случай называется ‘НУШ с притяжением’, и, соответственно, (15.4) – ‘НУШ с отталкиванием’. Как мы знаем из квантовой механики, волновые функции в притягивающих и отталкивающих потенциалах имеют качественно разные свойства. Поэтому и решения уравнений (15.3) и (15.4) отличаются радикальным образом. Самые интересные эффекты возникают в притягивающем случае (15.3), который, к тому же, обычно реализуется в оптических приложениях. Поэтому в дальнейшем мы сосредоточимся именно на нем.

Нелинейное уравнение Шредингера (15.3) является следствием вариационного принципа. А именно, оно получается, как экстремум ‘действия’

$$S = \int dt d\mathbf{r} (-i\psi^* \partial_t \psi + \nabla \psi^* \nabla \psi - |\psi|^4). \quad (15.5)$$

При вариации  $S$  удобно рассматривать поля  $\psi$  и  $\psi^*$ , как независимые динамические переменные, что возможно в силу того, что  $\psi$  имеет две степени свободы.

НУШ ведет к законам сохранения ряда величин, которые связаны с общими симметриями этого уравнения: инвариантностью по отношению к сдвигу фазы  $\psi$ , а также по отношению к сдвигу начала отсчета времени и начала координат. Соответствующими интегралами движения при произвольном числе измерений для локализованных в пространстве решений являются ‘число частиц’  $N$ , ‘энергия’  $E$  и ‘импульс’  $\mathbf{P}$ , то есть НУШ ведет к соотношениям  $dN/dt = 0$ ,  $dH/dt = 0$ ,  $d\mathbf{P}/dt = 0$ . Выражения для этих (Нётеровских) интегралов движения

$$N = \int d\mathbf{r} |\psi|^2, \quad (15.6)$$

$$E = \int d\mathbf{r} (-|\nabla \psi|^2 + |\psi|^4), \quad (15.7)$$

$$\mathbf{P} = -i \int d\mathbf{r} \psi^* \nabla \psi, \quad (15.8)$$

могут быть получены в рамках общей процедуры из действия (15.5), смотри раздел 17 F.

- Вывести выражения (15.6,15.7,15.8) из общих выражений раздела 17 F.

Проверим непосредственно законы сохранения (15.6,15.7,15.8). Для (15.3) комплексно-сопряженная амплитуда  $\psi^*$  удовлетворяет, очевидно, уравнению:

$$-i\partial_t \psi^* + \Delta \psi^* + 2|\psi|^2 \psi^* = 0. \quad (15.9)$$

Умножение 15.3 на  $\psi^*$ , (15.9) на  $-\psi$  и сложение полученных соотношений после интегрирования по пространству и учета эрмитовости лапласиана приведет к закону сохранению  $dN/dt = 0$ . Аналогичным образом можно проверить закон сохранения импульса  $\mathbf{P}$ . Для доказательства сохранения величины  $E$ , играющей роль энергии, подействуем оператором градиента

$\nabla$  на обе части уравнения (15.3) и умножим результат на  $\nabla \psi^*$ . Проведем аналогичное преобразование с сопряженным уравнением (15.9) и вычтем второе соотношение из первого. После интегрирования по пространству мы получим равенство:

$$i \frac{d}{dt} \int d\mathbf{r} |\nabla \psi|^2 = 2 \int d\mathbf{r} |\psi|^2 (\psi \Delta \psi^* - \psi^* \Delta \psi).$$

Далее, умножим обе части (15.3) на  $\psi^* |\psi|^2$  и для сопряженного уравнения – на  $\psi |\psi|^2$ , вычтем второе равенство из первого и проинтегрируем по пространству. Результатом будет соотношение:

$$i \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} |\psi|^4 = \int d\mathbf{r} |\psi|^2 (\psi \Delta \psi^* - \psi^* \Delta \psi).$$

Вычитание полученных соотношений приводит к закону сохранения энергии  $E$ . Аналогично проверяется закон сохранения импульса.

Для нелинейного уравнения Шредингера имеется замечательное соотношение – теорема Таланова, позволяющее сделать качественные выводы о поведении решений НУШ для широкого класса начальных условий. Для вывода теоремы Таланова рассмотрим функционал

$$I = \int d\mathbf{r} \mathbf{r}^2 |\psi|^2. \quad (15.10)$$

Для пакета, центрированного вокруг начала координат, этот функционал можно оценить, как  $I \sim NR^2$ , где  $R$  – размер пакета. Вычислим первую производную от  $I$  по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I &= i \int d\mathbf{r} \mathbf{r}^2 (\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*) \\ &= 2iDN + 4i \int d\mathbf{r} \psi (\mathbf{r} \nabla) \psi^*. \end{aligned} \quad (15.11)$$

Здесь  $D$  – размерность пространства. Продифференцируем  $I$  еще раз по времени, учитывая, что  $N$  – интеграл движения, то есть производная от него равна нулю:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} I &= -4 \int d\mathbf{r} [\Delta \psi (\mathbf{r} \nabla) \psi^* - \psi (\mathbf{r} \nabla) \Delta \psi^*] - \\ &8 \int d\mathbf{r} [\psi |\psi|^2 (\mathbf{r} \nabla) \psi^* - \psi (\mathbf{r} \nabla) (\psi^* |\psi|^2)] \end{aligned} \quad (15.12)$$

Выражение в квадратных скобках во втором слагаемом есть  $-(\mathbf{r} \nabla) |\psi|^4 / 2$ , так что это слагаемое в целом равно:

$$4 \int d\mathbf{r} (\mathbf{r} \nabla) |\psi|^4 = -4D \int d\mathbf{r} |\psi|^4. \quad (15.13)$$

Интегрирование по частям в первом слагаемом в (15.12) приведет его к виду:

$$-8 \int d\mathbf{r} \psi \Delta \psi^* = 8 \int d\mathbf{r} |\nabla \psi|^2. \quad (15.14)$$

Таким образом, мы пришли к соотношению:

$$\frac{d^2}{dt^2}I = 8 \int dr \left( |\nabla\psi|^2 - \frac{D}{2}|\psi|^4 \right). \quad (15.15)$$

В двумерном пространстве в правой части (15.15) возникает соотношение:

$$\frac{d^2}{dt^2}I = -8E, \quad D = 2. \quad (15.16)$$

Поскольку  $E$  не зависит от времени, то общее решение уравнения (15.16) легко выписывается:

$$I(t) = I(0) + Ct - 4Et^2, \quad D = 2, \quad (15.17)$$

где константы  $C$  и  $E$  определяются начальными условиями. Пусть они таковы, что  $E > 0$ . Тогда при любых конечных  $I(0)$  и  $C$  наступит такой момент времени  $t_*$ , что  $I(t_*) = 0$ . Из явного вида  $I(t)$  следует, что волновой пакет в момент  $t = t_*$  сожмется в точку. Сохранение числа частиц  $N$  влечет за собой сингулярность  $\psi$  в этот момент:  $|\psi|^2(\mathbf{r} \rightarrow 0, t \rightarrow t_*) \rightarrow \infty$ . Таким образом, в двух измерениях при  $E > 0$  происходит коллапс – явление, в нелинейной оптике называемое самофокусировкой светового пучка. Коллапс может произойти и при  $E < 0$ , однако при  $E > 0$  он неизбежен. Физическая сингулярность может произойти в точке, отличной от  $\mathbf{r} = 0$ , в момент времени более ранний, чем  $t = t_*$ . То, что мы сейчас показали, означает, что на временном интервале  $t \leq t_*$  коллапс при  $E > 0$  в какой-нибудь точке пространства обязательно произойдет.

В трехмерном пространстве уравнение (15.15) для  $I(t)$  приводит к неравенству:

$$\frac{d^2}{dt^2}I = -8E - 4 \int dr |\psi|^4 < -8E. \quad (15.18)$$

Поэтому вместо равенства (15.17) мы приходим к неравенству

$$I(t) < I(0) + Ct - 4Et^2, \quad D = 3. \quad (15.19)$$

Это неравенство по-прежнему означает неизбежность коллапса при  $E > 0$ .

Здесь необходимо уточнение: разумеется, коллапс не может происходить во всех точках пространства, обращение  $\psi$  в бесконечность происходит в одной точке. Чтобы найти момент времени  $t_*$ , когда происходит коллапс, рассмотрим модифицированный функционал Таланова:

$$I_{\mathbf{a}}(t) = \int dr (\mathbf{r} - \mathbf{a})^2 |\psi|^2. \quad (15.20)$$

Непосредственным дифференцированием с использованием уравнения эволюции и закона сохранения импульса находим  $d^2 I_{\mathbf{a}}/dt^2 = d^2 I/dt^2$ . Поэтому и для функционала  $I_{\mathbf{a}}(t)$  при  $E > 0$  также справедливо утверждение об обращении его в ноль в некоторый момент

времени, то есть, о коллапсе. Момент же  $t_*$  обращения  $I_{\mathbf{a}}(t)$  в ноль при данных начальных условиях зависит от  $\mathbf{a}$ . Место и момент коллапса будут определяться таким  $\mathbf{a}$ , при котором  $t_*$  будет наименьшим. Отметим, что мы фактически показали, что такая точка пространства и момент времени, где решение становится сингулярным, существуют.

Ситуация качественно отличается в одномерном случае. Тогда соотношение Таланова (15.15) принимает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}I = -4E + 4 \int dx |\nabla\psi|^2, \quad (15.21)$$

что означает невозможность коллапса. Действительно, если характерный размер пакета  $R(t)$  уменьшается, то сохранение числа частиц  $N$  требует, чтобы квадрат модуля амплитуды пакета рос как  $|\psi|^2 \sim R^{-1}(t)$ . При этом положительная добавка в правой части (15.21) также растет:

$$\int dx |\nabla\psi|^2 \sim NR^{-2}.$$

При уменьшении  $R$  эта величина неизбежно становится по абсолютной величине больше отрицательного, но постоянного  $-E$ . Это приведет к стабилизации поля  $\psi$ . Таким образом, при достаточно большой амплитуде начального значения  $\psi$  возникнут локализованные объекты, называемые солитонами.

Мы начнем с простейшего случая покоящегося солитона. Будем искать локализованное в пространстве решение уравнения (15.3) в виде

$$\psi(t, x) = e^{i\eta^2(t-t_0)} g(x). \quad (15.22)$$

Уравнение на функцию  $g(x)$  имеет вид  $g'' + 2g^3 - \eta^2 g = 0$ , что является уравнением Ньютона в стационарном потенциале и поэтому его порядок может быть понижен в силу сохранения энергии. Умножая уравнение для  $g$  на  $g'$  и интегрируя по  $x$ , мы получаем

$$g' = -g\sqrt{\eta^2 - g^2}, \quad \int_g^\eta \frac{dg}{g\sqrt{\eta^2 - g^2}} = x - x_0. \quad (15.23)$$

Здесь  $x_0$  – константа интегрирования, знак минус для корня выбран для убывания  $g$  с ростом  $|x|$ . Первообразная в (15.23) с помощью замены  $g = \eta/y$  приводится к табличной и мы приходим к трехпараметрическому семейству решений:

$$\psi(t, x) = e^{i\eta^2(t-t_0)} \frac{\eta}{\cosh[\eta(x-x_0)]}. \quad (15.24)$$

Теперь заметим, что уравнение (15.3) инвариантно относительно преобразования Галилея. А именно, если  $\psi(t, x)$  – решение (15.3), то и

$$\psi(t, x - \beta t) e^{i\beta x - i\beta^2 t} \quad (15.25)$$

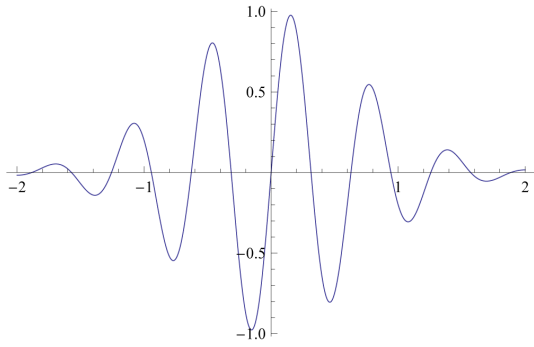


Рис. 6: Мнимая часть  $\psi$  для односолитонного решения.

также будет решением НУШ. Применяя это преобразование к (15.24), мы получим семейство односолитонных решений, зависящее от четырех параметров  $t_0, x_0, \eta, \beta$ . При  $x_0 = t_0 = 0$  это решение имеет вид

$$\psi(t, x) = \frac{\eta}{\text{ch}[\eta(x - \beta t)]} \exp[i(\eta^2 - \beta^2)t + i\beta x]. \quad (15.26)$$

Зависимость мнимой части решения (15.26) от  $x$  при  $t = 0$  приведено на рисунке 6.

В одномерном пространстве НУШ является “точно интегрируемым”. Это означает, что помимо стандартных (Нётеровских) интегралов движения, НУШ ведет к дополнительному бесконечному набору интегралов движения. Первым представителем этого семейства является

$$R = \int dx \left[ \psi^* \partial_x^3 \psi - \frac{3}{2} \psi^2 \partial_x (\psi^*)^2 \right]. \quad (15.27)$$

Этот интеграл уже не связан с пространственно-временными или фазовой симметриями уравнения, его сохранение является следствием интегрируемости НУШ.

- Вычислить значения Нётеровских интегралов движения  $N, E, \mathbf{P}$  в одном измерении для движущегося солитона:

$$\psi(t, x) = \frac{\eta}{\text{ch}[\eta(x - \beta t)]} e^{i(\eta^2 - \beta^2)t + i\beta x}.$$

- Доказать, что

$$\frac{d}{dt} I_{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt} I - 4\mathbf{aP}.$$

Здесь  $I_{\mathbf{a}}$  – модифицированный функционал Таланова (15.20).

- Показать, что в одном измерении функционал (15.27) является интегралом движения.

## 16. ОТДЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

### А. $\delta$ -функция Дирака

Здесь мы рассматриваем основные свойства  $\delta$ -функции Дирака  $\delta(t)$ . ‘Физическое’ определение  $\delta$ -функции состоит в том, что она равна нулю для всех  $t \neq 0$ , равна бесконечности при  $t = 0$ , а интеграл от нее равен единице:  $\int dt \delta(t) = 1$ . Эту функцию можно представить себе, как предел некоторой последовательности функций, которые стремятся к указанным свойствам. Например,  $\delta$ -функцию можно записать в виде предела

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2}. \quad (16.1)$$

Действительно, при любом положительном  $\epsilon$  интеграл от функции в правой части (16.1) равен единице, при  $t \neq 0$  правая часть (16.1) стремится к нулю, а при  $t = 0$  – к бесконечности при стремлении  $\epsilon$  к нулю.

Поскольку значение  $\delta(t)$  отлично от нуля только при  $t = 0$ , то для любой непрерывной функции  $f(t)$  справедливо соотношение  $\delta(t)f(t) = \delta(t)f(0)$ . Или, обобщая,  $\delta(t-s)f(t) = \delta(t-s)f(s)$ . Отсюда следует важное свойство  $\delta$ -функции:

$$\int dt \delta(t-s)f(t) = f(s). \quad (16.2)$$

Важным частным случаем соотношения (16.2) является

$$\int dt \delta(t) \exp(i\omega t) = 1. \quad (16.3)$$

Это соотношение можно рассматривать, как прямое преобразование Фурье от  $\delta$ -функции. Тогда обратное преобразование Фурье дает следующее интегральное представление для  $\delta$ -функции

$$\delta(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t). \quad (16.4)$$

Из основных свойств  $\delta$ -функции следует, что  $\int dt \delta(t) = 1$  при интегрировании по любому интервалу, который включает точку  $t = 0$ . Поэтому

$$\int_{-\infty}^s dt \delta(t) = \theta(s), \quad (16.5)$$

$$\theta(s) = 0 \text{ if } s < 0, \quad \theta(s) = 1 \text{ if } s > 0.$$

Функция  $\theta(t)$  называется ступенчатой функцией или функцией Хэвисайда. Таким образом, мы нашли первообразную  $\delta$ -функции. Дифференцируя по  $s$  соотношение (16.5), мы находим  $\theta'(t) = \delta(t)$ . Можно ввести не только первообразную, но и производную от  $\delta$ -функции,  $\delta'(t)$ . Правила обращения с этим объектом следуют из соотношения (16.2). А именно, интегрируя по частям, находим для произвольной гладкой

функции  $f$

$$\int dt \delta'(t-s)f(t) = -f'(s). \quad (16.6)$$

Подставляя в соотношение (16.6)  $f(t) = (t-s)g(t)$  и сравнив результат с соотношением (16.2), мы заключаем, что  $t\delta'(t) = -\delta(t)$ . Раскладывая теперь  $f(t)$  в ряд Тейлора (до первого порядка) вблизи точки  $t = s$  и используя указанное соотношение, мы находим

$$f(t)\delta'(t-s) = f(s)\delta'(t-s) - f'(s)\delta(t-s). \quad (16.7)$$

Обратим внимание на то, что из соотношения (16.7) следует, что  $f(t)\delta'(t-s) \neq f(s)\delta'(t-s)$ .

До сих пор мы неявно подразумевали, что функция  $f$  и ее производная являются непрерывными функциями. Если же функция испытывает в некоторой точке скачок или излом, то надо быть аккуратным при обращении с ее производными (возникающими, в частности, при интегрировании по частям). Примером такой функции, рассмотренной выше, является разрывная функция Хэвисайда, производная которой сводится к  $\delta$ -функции. Обобщая это наблюдение, мы заключаем, что если функция  $f(t)$  испытывает скачок в точке  $s$ , то

$$f'(t) = [f(s+0) - f(s-0)]\delta(t-s) + g(t), \quad (16.8)$$

где функция  $g(t)$  ограничена вблизи точки  $t = s$ . Здесь  $f(s-0)$  и  $f(s+0)$  – значения функции  $f(t)$  слева и справа от точки разрыва, то есть  $f(s+0) - f(s-0)$  – скачок функции на разрыве. Подобным же образом анализируется функция  $f(t)$ , испытывающая в некоторой точке излом, который соответствует скачку первой производной. Тогда  $\delta$ -функциональный вклад возникает во второй производной от функции  $f(t)$ .

- Доказать соотношения

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2x^2\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)^2}, \\ \delta(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{\epsilon}\right), \\ \delta'(x) &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2x\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)^2}, \\ \delta(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nx)}{\pi nx^2}. \end{aligned}$$

- Получить соотношения (16.3) и (16.4) предельным переходом  $\epsilon \rightarrow 0$  с использованием представления (16.1).
- Выразить  $t\delta''(t)$  через  $\delta'(t)$ .
- Доказать соотношение

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \gamma^2\right) \exp(-\gamma|t|) = -2\gamma\delta(t).$$

- Доказать соотношение

$$\delta[f(t)] = \sum_n \frac{1}{|f'(s_n)|} \delta(x - s_n),$$

где суммирование идет по всем точкам  $s_n$ , в которых функция  $f(t)$  обращается в ноль. Указание: воспользоваться формулой для дифференцирования сложной функции и основным свойством  $\delta$ -функции (16.2).

## В. Преобразование Фурье

Любую функцию  $f(\mathbf{x})$ , заданную в  $d$ -мерном пространстве, и стремящуюся к нулю на бесконечности, можно разложить в интеграл Фурье:

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{dq_1 dq_2 \dots dq_d}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{f}(\mathbf{q}), \quad (16.9)$$

где  $\tilde{f}(\mathbf{q})$  называется преобразованием Фурье функции  $f(\mathbf{x})$ . Эту величину можно вычислить в соответствии с правилом

$$\tilde{f}(\mathbf{q}) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_d \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) f(\mathbf{x}). \quad (16.10)$$

Преобразования (16.9) и (16.10) являются обратными друг другу. Из выражения (16.10) следует, что преобразование Фурье действительной функции  $f(\mathbf{x})$  удовлетворяет соотношению  $\tilde{f}(-\mathbf{q}) = \tilde{f}^*(\mathbf{q})$ .

- Найти Фурье-преобразование следующих функций:  $f(\mathbf{x}) = \exp(-x^2)$  в  $d$ -мерном пространстве;  $\exp(-|\mathbf{x}|)$  в трехмерном пространстве;  $(x^2 + a^2)^{-1}$ , где  $a$  – константа, в одномерном пространстве.

Приведем важное соотношение, касающееся так называемой свертки двух функций

$$h(\mathbf{y}) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_d f(\mathbf{x})g(\mathbf{y} - \mathbf{x}). \quad (16.11)$$

Подставляя выражение (16.11) в интеграл Фурье (16.10) и переходя к интегрированию по  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ , мы находим

$$\tilde{h}(\mathbf{q}) = \tilde{f}(\mathbf{q}) \tilde{g}(\mathbf{q}). \quad (16.12)$$

Таким образом, свертке в обычном пространстве соответствует простое произведение в Фурье-представлении.

Отметим, что для  $\delta$ -функции,  $\delta(\mathbf{x}) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_d)$ , преобразованием Фурье является единица,  $\tilde{\delta} = 1$ . Это свойство является прямым обобщением соотношений (16.3,16.4). Отметим также обобщение на  $d$ -мерный случай соотношения (16.2)

$$f(\mathbf{y}) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_d \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) f(\mathbf{x}). \quad (16.13)$$



Используя теперь соотношения (16.11,16.12), мы возвращаемся к  $\tilde{\delta} = 1$ . Это объясняет эффективность вычисления Гриновских функций переходом к Фурье-представлению.

При учете зависимости функции  $f$  от времени  $t$  в преобразование Фурье можно включить также и время. Мы будем делать это следующим образом

$$\tilde{f}(\omega, \mathbf{q}) = \int dt d\mathbf{x} \exp(i\omega t - i\mathbf{q}\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}), \quad (16.14)$$

$$f(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\omega d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{f}(\omega, \mathbf{q}), \quad (16.15)$$

где  $d$  – размерность пространства,  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_d$ ,  $d\mathbf{q} = dq_1 dq_2 \dots dq_d$ . Обратим внимание на то, что время  $t$  входит в преобразования (16.14,16.15) с обратным по сравнению с пространственными координатами знаком.

Рассмотрим теперь двумерное пространство  $d = 2$  и изучим функцию  $f$ , зависящую только от радиус-вектора  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . В этом случае  $\tilde{f}$  будет зависеть только от  $q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ . Переходя теперь в соотношениях (16.9,16.10) к интегрированию по полярным координатам  $r, \varphi$  и  $q, \phi$ , мы получаем

$$f(r) = \int \frac{dq q d\phi}{(2\pi)^2} \exp[iqr \cos(\varphi - \phi)] \tilde{f}(q),$$

$$\tilde{f}(q) = \int dr r d\varphi \exp[-iqr \cos(\varphi - \phi)] f(r).$$

Используя теперь соотношение (7.17), мы находим

$$f(r) = \int dq q J_0(qr) \tilde{f}(q), \quad (16.16)$$

$$\tilde{f}(q) = \int dr r J_0(qr) f(r). \quad (16.17)$$

где  $J_0$  – функция Бесселя нулевого порядка, а  $\tilde{f} = f/(2\pi)$ . Соотношения (16.16,16.17) являются следствием и модификацией преобразования Фурье. Аналогичные соотношения можно получить для функций Бесселя ненулевого порядка.

- Найти модификацию соотношений (16.16,16.17), которая получается при подстановке в преобразование Фурье функции  $f = g(r) \cos \varphi$ .

Помимо разложения в интеграл Фурье (16.9), в математической физике широко используется разложение в ряд Фурье, которое справедливо для периодических функций или функций, заданных на конечном интервале. Мы сосредоточимся на одномерном случае, поскольку обобщение приведенных соотношений на многомерный случай, как правило, не представляет труда. Отметим, что представление функций в виде ряда Фурье является ведущим способом, который используется при организации сложного численного моделирования.

Мы будем иметь дело с периодической функцией, период которой мы обозначим  $L$  или с функцией, заданной на конечном интервале  $0 < x < L$ . (Этого всегда можно добиться сдвигом начала координат.) Тогда функция  $f(x)$  раскладывается в следующий ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n \exp(2\pi i n x / L), \quad (16.18)$$

где  $n$  – целые числа, пробегающие от минус до плюс бесконечности. Ряд (16.18) задает некоторую периодическую с периодом  $L$  функцию, которая определена при произвольных  $x$ . Таким образом, если исследуется функция, заданная на интервале  $0 < x < L$ , то ряд Фурье (16.18) задает, как говорят, ее периодическое продолжение на всю действительную ось. Обратим внимание на то, что это периодическое продолжение имеет, вообще говоря, разрывы в точках  $x_n = nL$ .

Обратное к (16.18) преобразование имеет вид

$$f_n = \int_0^L \frac{dx}{L} \exp(-2\pi i n x / L) f(x). \quad (16.19)$$

Отсюда следует, что для действительной функции  $f(x)$  коэффициенты ее разложения в ряд Фурье (16.18) удовлетворяют соотношению  $f_{-n} = f_n^*$ . В этом случае ряд Фурье (16.18) иногда записывают через тригонометрические функции

$$f(x) = f_0 + 2 \sum_1^{+\infty} [\operatorname{Re} f_n \cos(2\pi n x / L) - \operatorname{Im} f_n \sin(2\pi n x / L)]. \quad (16.20)$$

Для функций, которые меняются на масштабах, гораздо меньших  $L$ , в ряде Фурье (16.18) существенны большие  $n$ . Тогда этот ряд может быть приблизительно заменен на интеграл Фурье, который идет по волновым векторам  $q = 2\pi n / L$ . Отсюда следует правило подстановки

$$\sum_n \rightarrow L \int \frac{dq}{2\pi},$$

которое позволяет преобразовывать сумму в интеграл. Таким образом, ряд Фурье переходит в интеграл Фурье со множителем  $L$  – периодом или длиной интервала.

В дальнейшем мы полагаем  $L = 2\pi$ , чего всегда можно добиться соответствующим выбором единиц измерения  $x$ . Тогда соотношения (16.18,16.19) приобретают следующий вид

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n \exp(inx), \quad (16.21)$$

$$f_n = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \exp(-inx) f(x). \quad (16.22)$$

Обратим внимание на то, что интегрирование в (16.22) можно вести по произвольному интервалу длиной  $2\pi$ . Эта свобода позволяет из соображений удобства выбирать интервал, на котором задана функция  $f(x)$ . Например, часто выбирают интервал  $-\pi < x < \pi$ .

- Разложить в ряд Фурье функции  $f = \exp(\alpha x)$ , задана на интервале  $0 < x < 2\pi$ ;  $f = x$ , задана на интервале  $-\pi < x < \pi$ .

Если периодическое продолжение функции, заданной на конечном интервале, содержит разрывы, то это приводит к медленному убыванию коэффициентов ряда Фурье при росте  $n$ . Чтобы найти закон этого убывания, рассмотрим разложение в ряд Фурье  $\delta$ -функции. Точнее говоря, речь идет о бесконечной сумме  $\delta$ -функций, которая является периодической функцией  $x$ . Используя соотношение (16.22), находим

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(inx). \quad (16.23)$$

В этом случае коэффициенты разложения  $f_n$  вообще не зависят от  $n$ . Для разрывной функции  $\delta$ -функции возникают в ее производной по  $x$ , то есть коэффициенты разложения этой производной не зависят от  $n$  при больших  $n$ . Для самой разрывной функции  $f$  это означает, что ее коэффициенты разложения в ряд Фурье ведут себя пропорционально  $1/n$  при больших  $n$ .

### С. Преобразование Лапласа

В задачах, в которых исследуется решение линейных дифференциальных уравнений с начальными условиями, бывает полезным преобразование Лапласа, которое определяется для функций, заданных на положительных временах  $t$ . Преобразование Лапласа функции  $\Phi(t)$  определяется, как

$$\tilde{\Phi}(p) = \int_0^{\infty} dt \exp(-pt) \Phi(t). \quad (16.24)$$

Мы предполагаем, что функция  $\Phi(t)$  растет со временем  $t$  не быстрее, чем некоторая экспонента от  $t$ . Тогда интеграл (16.24) сходится при достаточно больших  $p$ . Более того, в этом случае  $\tilde{\Phi}(p)$  стремится к нулю при  $p \rightarrow \infty$ . Если же выйти в комплексную плоскость по  $p$ , то можно утверждать, что интеграл сходится при достаточно больших значениях  $\operatorname{Re} p$ . Другими словами, функция  $\tilde{\Phi}(p)$  заведомо является аналитической в области  $\operatorname{Re} p > C$ , где  $C$  – некоторая константа.

- Найти преобразования Лапласа следующих функций:  $\Phi = \exp(-\lambda t)$ ,  $\Phi = t^n$ ,  $\Phi = \cos(\nu t)$ ,  $\Phi = \cosh(\lambda t)$ ,  $\Phi = t^{-1/2}$ .

Преобразование, обратное к преобразованию Лапласа, имеет следующий вид

$$\Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{\Phi}(p), \quad (16.25)$$

где интегрирование идет вдоль прямой, параллельной мнимой оси, в области аналитичности функции  $\tilde{\Phi}(p)$ . Это соотношение можно рассматривать, как модификацию преобразования Фурье. Возможны деформации контура интегрирования в области аналитичности. Обратим внимание на то, что при отрицательных  $t$  интеграл (16.25) равен нулю, так как в этом случае оба множителя,  $\exp(pt)$  и  $\tilde{\Phi}(p)$ , стремятся к нулю при увеличении  $\operatorname{Re} p$ . Поэтому, сдвигая контур интегрирования в большие  $\operatorname{Re} p$  (и оставаясь при этом в области аналитичности), мы получим ноль. Это соответствует физическому смыслу рассматриваемой задачи, когда мы исследуем функцию, определенную только при положительных  $t$ .

Рассмотрим определенное на положительных  $t$  уравнение

$$L(d/dt)\Phi(t) = f(t), \quad (16.26)$$

где  $L(x)$  – некоторый полином (порядок которого мы будем обозначать  $n$ ). Произведя преобразование Лапласа уравнения (16.26), находим  $L(p)\tilde{\Phi}(p) = \tilde{f}(p)$ . Таким образом, решение уравнения (16.26) записывается в следующем виде

$$\Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{\tilde{f}(p)}{L(p)}. \quad (16.27)$$

Если  $\tilde{f}(p)$  при больших положительных  $\operatorname{Re} p$  стремится к нулю, то выражение (16.27) дает решение уравнения с нулевыми начальными условиями. Действительно, в этом случае для  $m = 0, \dots, n-1$

$$\frac{d^m}{dt^m} \Phi(+0) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} p^m \frac{\tilde{f}(p)}{L(p)} = 0,$$

что доказывается сдвигом контура интегрирования в большие  $\operatorname{Re} p$ .

В таком же виде (16.27) можно записать и решение задачи Коши однородного уравнения (16.26) (с нулевой правой частью). Для этого надо использовать в качестве функции  $f(t)$  линейную комбинацию  $\delta(t)$  и ее производных, которая обеспечивает генерацию начальных условий из нулевой при отрицательных  $t$  функции  $\Phi(t)$ . Количество производных от  $\delta$ -функции зависит от порядка полинома  $L$ : если этот порядок равен  $n$ , то надо брать производные до  $n-1$  порядка включительно. В представлении Лапласа такая функция  $\tilde{f}(p)$  представляет собой полином порядка  $n-1$  по  $p$ . Отсюда следует, например, что при больших  $t$  поведение однородного решения уравнения (16.26) будет экспоненциальным, причем ведущая экспонента определяется корнем уравнения  $L(p) = 0$  с наибольшей действительной частью. При решении смешанной

задачи (16.26), когда помимо правой части задано начальное условие, надо брать линейную комбинацию вынужденного решения (16.27) и решения задачи Коши однородного уравнения.

- Найти решение уравнения  $\ddot{\Phi} + \Phi = \exp(-\lambda t)$  с начальными условиями  $\Phi(0) = 1$ ,  $\dot{\Phi}(0) = 0$ .
- Найти решение уравнения  $\ddot{\Phi} + \Phi = t^{-1/2}$  с начальными условиями  $\Phi(0) = 1$ ,  $\dot{\Phi}(0) = 0$ .

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра́ первого рода с однородным ядром  $K$ :

$$\int_0^t ds K(t-s)\Phi(s) = f(t), \quad (16.28)$$

где функция  $f(t)$  задана, а найти надо  $\Phi(t)$ . Делая преобразование Лапласа обеих частей уравнения (16.28), находим  $\tilde{K}(p)\tilde{\Phi}(p) = \tilde{f}(p)$ . Подстановка решения этого алгебраического уравнения в (16.26) дает решение уравнения (16.28) в виде интеграла по  $p$ . Аналогичным образом решается интегральное уравнение Вольтерра́ второго рода с однородным ядром:

$$\Phi(t) + \int_0^t ds K(t-s)\Phi(s) = f(t). \quad (16.29)$$

После перехода к представлению Лапласа мы находим алгебраическое уравнение  $[1 + \tilde{K}(p)]\tilde{\Phi}(p) = \tilde{f}(p)$ .

- Найти решение уравнения (16.28) для  $K(t) = \exp(-\lambda t)$ ,  $f(t) = t^n$ ;  $K(t) = t^{-1/2}$ ,  $f(t) = \cos(\nu t)$ .

Рассмотрим движение частицы в Кулоновском потенциале. Для сферически симметричного состояния в случае притяжения уравнение Шрёдингера в безразмерных переменных сводится к

$$\left( \frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} + E \right) \Phi = 0, \quad (16.30)$$

где  $E$  – энергия,  $r$  – радиус-вектор и волновая функция  $\Psi$  связана с величиной  $\Phi$  соотношением  $\Psi = \Phi/r$ . Умножим уравнение (16.30) на  $r$  и сделаем преобразование Лапласа по этой переменной. В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dp} \left[ (p^2/2 + E)\tilde{\Phi} \right] = \tilde{\Phi}.$$

Нас будут интересовать связанные состояния, соответствующие отрицательной энергии. Подставляя  $E = -\alpha^2/2$ ,  $\alpha > 0$ , и решая полученное уравнение для  $\tilde{\Phi}$ , находим

$$\tilde{\Phi} = \frac{C}{p^2 - \alpha^2} \left( \frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^{1/\alpha}, \quad (16.31)$$

где  $C$  – константа. Выражение (16.31) имеет сингулярность при  $p = \alpha$ , то есть контур интегрирования в обратном преобразовании Лапласа (16.25) должен идти

справа от этой точки. Это означает, что при больших  $r$  функция  $\Phi(r)$  ведет себя пропорционально  $\exp(\alpha r)$ . Это поведение не соответствует связанным состояниям. Исключением является случай  $\alpha = 1/n$  ( $n$  – целое число), тогда особенность при  $p = \alpha$  исчезает. Именно эти значения соответствуют связанным состояниям частицы с энергией  $E = -1/(2n^2)$ . Для основного состояния  $n = 1$  мы находим  $\tilde{\Phi} \propto (p + \alpha)^{-2}$ . Отсюда следует  $\Phi(r) \propto r \exp(-\alpha r) = r \exp(-r)$ , то есть  $\Psi \propto \exp(-r)$ .

- Найти приведенным методом волновую функцию связанного состояния, соответствующего  $n = 2$ .
- Найти приведенным методом волновые функции связанных состояний, соответствующих ненулевому угловому числу  $l$ .

#### Д. Собственные функции оператора

Рассмотрим функции одной переменной, заданные на конечном интервале  $a < x < b$ . Будем называть дифференциальный оператор  $\hat{L}$  самосопряженным, если для любых двух функций,  $f(x)$  и  $g(x)$ , из интересующего нас класса выполняется соотношение

$$\int_a^b dx f \hat{L}g = \int_a^b dx g \hat{L}f. \quad (16.32)$$

Выполнение условия (16.32) может быть связано как со свойствами класса рассматриваемых функций, так и со свойствами оператора  $\hat{L}$ . Например, нулевые граничные условия или периодические граничные условия (когда на концах интервала одинаковы значения самой функции и одинаковы значения ее производной), наложенные на функции  $f$  и  $g$ , приводят к самосопряженности оператора  $\hat{L} = d^2/dx^2 + U(x)$ .

В дальнейшем нас будет интересовать обобщение соотношения (16.32)

$$\int_a^b dx \rho f \hat{L}g = \int_a^b dx \rho g \hat{L}f, \quad (16.33)$$

где  $\rho(x)$  – положительная функция, которую обычно называют весовой функцией или мерой интегрирования. Удовлетворяющие условию (16.33) оператор  $\hat{L}$  уже не является самосопряженным. В частности, им может быть оператор Штурма-Лиувилля

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + Q \frac{d}{dx} + U, \quad (16.34)$$

где  $Q$  и  $U$  – функции от  $x$ . Легко проверить, что при нулевых или периодических граничных условиях на функции  $f, g$  оператор (16.34) удовлетворяет условию (16.33), если

$$\frac{d}{dx} \rho = Q \rho \rightarrow \rho = \exp \left( \int dx Q \right). \quad (16.35)$$

Рассмотрим теперь собственные функции  $f_n$  оператора  $\hat{L}$ , которые удовлетворяют уравнению  $\hat{L}f_n = \lambda_n f_n$ , где  $\lambda_n$  – собственное значение оператора  $\hat{L}$ . Условие (16.33) приводит к соотношению

$$\int dx \rho f_n \hat{L} f_m = \lambda_m \int dx \rho f_n f_m = \lambda_n \int dx \rho f_n f_m.$$

Таким образом, при  $\lambda_n \neq \lambda_m$  выполняется условие ортогональности

$$\int_a^b dx \rho f_n f_m = 0. \quad (16.36)$$

Как следует из соотношения (16.32), собственные функции самосопряженных операторов также ортогональны, причем с весом  $\rho = 1$ . В качестве примера приведем  $\cos(nx)$ ,  $\sin(nx)$ , которые являются собственными функциями оператора  $d^2/dx^2$  на интервале  $(0, 2\pi)$  в классе периодических функций. Поскольку для этого оператора Штурма-Лиувилля (16.34)  $Q = 0$ , то в силу (16.35)  $\rho = 1$ , и соотношения (16.36) легко проверяются непосредственно.

Дополнительного комментария требует наличие вырождения (то есть собственных функций с совпадающими собственными значениями оператора  $\hat{L}$ ). Мы будем считать, что набор собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению оператора  $\hat{L}$ , за счет линейного преобразования выбран таким образом, чтобы внутри этого набора также выполнялось условие ортогональности (16.36). Отметим, что для рассмотренного нами примера оператора  $d^2/dx^2$ , собственные функции которого дважды вырождены (собственному значению  $\lambda_n = -n^2$  соответствуют две собственные функции), условию взаимной ортогональности удовлетворяют как раз  $\cos(nx)$ ,  $\sin(nx)$ .

Если  $f_n$  является полным набором собственных функций оператора  $\hat{L}$  из интересующего нас класса, то любую функцию  $f$  того же класса можно разложить в ряд по этим собственным функциям:

$$f = \sum_n c_n f_n, \quad (16.37)$$

причем коэффициенты этого разложения в силу условий ортогональности (16.36) равны

$$c_n = A_n^{-1} \int dx \rho f_n f, \quad A_n = \int dx \rho f_n^2. \quad (16.38)$$

Примером разложения (16.37) является разложение по уже упомянутым нами функциям  $\cos(nx)$ ,  $\sin(nx)$ , которое является не чем иным, как разложением в ряд Фурье. Подставляя выражение (16.38) для коэффициентов  $c_n$  в разложение (16.37), мы находим соотношение

$$f(x) = \int dy \rho \sum_n \frac{f_n(x) f_n(y)}{A_n} f(y),$$

которое должно выполняться для любой функции  $f$  из выбранного нами класса. Поэтому справедливо соотношение

$$\sum_n A_n^{-1} f_n(x) f_n(y) = \frac{1}{\rho(y)} \delta(x - y), \quad (16.39)$$

которое является выражением полноты системы функций  $f_n$ .

Рассмотрим теперь неоднородную задачу  $\hat{L}f = \phi$ . Представляя обе функции,  $f$  и  $\phi$ , в виде ряда по собственным функциям оператора  $\hat{L}$ :  $f = \sum_n c_n f_n$  и  $\phi = \sum_n a_n f_n$ , мы находим  $c_n = a_n/\lambda_n$ . Таким образом, мы сталкиваемся с проблемой, если у оператора  $\hat{L}$  имеется нулевое собственное значение. (В этом случае часто говорят, что у оператора  $\hat{L}$  есть нулевые моды.) Эта проблема является неустранимой в том смысле, что если в разложении “силы”  $\phi$  имеется ненулевой вклад с собственной функцией, соответствующей нулевому собственному числу, то неоднородная задача  $\hat{L}f = \phi$  не может быть решена в базисе функций  $f_n$ . Поясним это утверждение на примере оператора  $\hat{L} = d^2/dx^2$ , который имеет собственную функцию, соответствующую нулевому собственному значению (нулевую моду), которая есть просто константа. Будем рассматривать задачу с периодическими граничными условиями. Наличие константы в разложении  $\phi$  означает, что интеграл от  $\phi$  по периоду не равен нулю. В то же время для периодической функции  $f$  интеграл по периоду от  $d^2 f/dx^2$  равен нулю. Поэтому уравнение  $d^2 f/dx^2 = \phi$  не имеет решения на классе периодических функций.

Отметим, что к изучаемому нами типу функций принадлежат полиномы Лежандра и Эрмита. Как следует из уравнения (9.1) для полиномов Эрмита, они являются собственными функциями оператора Штурма-Лиувилля (16.34) с  $Q = -2x$ ,  $U = 0$ . В этом случае в соответствии с (16.35)  $\rho = \exp(-x^2)$ , а интервал интегрирования по  $x$  простирается от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Поскольку  $\rho(x)$  быстро стремится к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ , от функций  $f$  следует требовать не слишком быстрого роста на бесконечности. Поэтому мы приходим к условиям ортогональности (16.36) для полиномов Эрмита, которые и зафиксированы соотношением (9.11).

Как следует из уравнения (8.4), которому подчиняются полиномы Лежандра, они являются собственными функциями оператора Штурма-Лиувилля (16.34) с  $Q = \cot \theta$  и  $U = 0$ . В этом случае в соответствии с (16.35)  $\rho = \sin \theta$ . Интервал же интегрирования по углу  $\theta$  распространяется от 0 до  $\pi$ . Поскольку  $\rho$  обращается в ноль на концах интервала, достаточно потребовать конечности функций  $f$  на этом интервале, что определяет рассматриваемый класс функций. Условие (16.36) переписывается в виде  $\int d\mu f_n f_m = 0$ , где  $\mu = \cos \theta$ . Таким образом, в терминах переменной  $\mu$  полиномы Лежандра ортогональны с весом единица на интервале  $-1 < \mu < 1$ , что и зафиксировано соотношением (8.16). Отметим, что соотношение ортого-

нальности (16.36) не предполагает, что оператор  $\hat{L}$  является оператором Штурма-Лиувилля (16.34). Поэтому при доказательстве соотношений (8.16) можно исходить и непосредственно из уравнения (8.5), которое показывает, что полиномы Лежандра являются собственными функциями самосопряженного оператора, что и приводит прямо к (8.16).

## 17. ОТДЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

В настоящем разделе мы кратко представляем некоторые методы, часто используемые при анализе задач математической физики.

### А. Метод характеристик

Метод характеристик позволяет свести решение определенного класса уравнений в частных производных к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. А именно, он применим к уравнениям, которые содержат только первые производные и линейным по этим производным. Такое уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla g = f, \quad (17.1)$$

где  $g$  – искомая функция, зависящая от времени  $t$  и координат  $\mathbf{x}$  пространства произвольной размерности. “Скорость”  $\mathbf{V}$  и “накачка”  $f$  являются некоторыми функциями времени и координат,  $t, \mathbf{x}$ , а также самой искомой функции  $g$ . Тогда решение уравнения (17.1) может быть построено следующим образом. Надо найти решения уравнений

$$\frac{dg}{dt} = f, \quad (17.2)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V}. \quad (17.3)$$

Траектории, описываемые уравнением (17.3), называются характеристиками системы. Чтобы найти значение функции  $g$  в момент времени  $t$  и в точке  $\mathbf{x}$ , необходимо взять характеристику, которая заканчивается в момент времени  $t$  в точке  $\mathbf{x}$ . После этого надо решить уравнение (17.2) вдоль этой характеристики, используя в качестве начального условия  $g(t_0, \mathbf{x}_0)$ , где  $t_0$  – начальное время, при котором задается начальное условие на функцию  $g$ , а  $\mathbf{x}_0$  – точка, в которой находится решение уравнения (17.3) в начальный момент времени  $t_0$ .

### В. Метод стационарной фазы

Метод стационарной фазы работает для интегралов вида  $\int dx \exp[ih(x)]$ , где  $h(x)$  – действительная

функция, имеющая в области интегрирования стационарную точку  $x_0$ , то есть  $dh/dx(x_0) = 0$ , причем  $|d^2h/dx^2(x_0)| \gg 1$ . В этом случае основной вклад в интеграл определяется окрестностью стационарной точки, так как именно в этой окрестности функция  $\exp[ih(x)]$  осциллирует медленнее всего. В окрестности стационарной точки функцию  $h$  можно разложить в ряд по  $x - x_0$ . Удерживая члены до второго порядка, можно написать

$$h \approx \Theta \pm \frac{A}{2}(x - x_0)^2, \quad (17.4)$$

где линейный член отсутствует в силу стационарности фазы в точке  $x_0$ , и  $\pm A = d^2h/dx^2(x_0)$ . Знак  $\pm$  перед  $A$  связан с тем, что мы полагаем  $A > 0$ . Далее

$$\begin{aligned} \int dx \exp[ih(x)] &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[i\Theta \pm iA(x - x_0)^2/2] \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \exp(i\Theta \pm i\pi/4). \end{aligned} \quad (17.5)$$

Беря действительную и мнимую части соотношения (17.5), мы находим

$$\int dx \cos h \approx \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \cos(\Theta \pm \pi/4), \quad (17.6)$$

$$\int dx \sin h \approx \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \sin(\Theta \pm \pi/4). \quad (17.7)$$

### С. Метод перевала

Метод перевала применим к интегралам вида

$$g(\nu) = \int_a^b dx \exp[\nu f(x)] \phi(x), \quad (17.8)$$

где (действительная) функция  $f(x)$  достигает на интервале  $(a, b)$  абсолютного максимума в некоторой промежуточной точке  $c$ . Тогда при больших положительных  $\nu$  основной вклад в интеграл (17.8) определяется узкой окрестностью этого максимума. Раскладывая функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора вблизи точки  $x = c$ , мы находим  $f \approx f(c) + (1/2)f''(c)(x - c)^2$ . Так как точка  $x = c$  соответствует максимуму функции  $f$ , то  $f''(c) < 0$ . Подставляя это разложение в (17.8) и заменяя в нем  $\phi(x)$  на  $\phi(c)$ , мы приходим к Гауссовому интегралу. При больших значениях  $\nu$  интегрирование по  $x$  в этом интеграле можно распространить от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Вычисляя получившийся Гауссов интеграл, находим асимптотическое выражение

$$g(\nu) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-\nu f''(c)}} \phi(c) \exp[\nu f(c)], \quad (17.9)$$

которое справедливо при  $\nu \gg 1$ .

Отметим, что если функция  $f(x)$  достигает абсолютного максимума на одном из краев интервала ( $a$

или  $b$ ), то именно окрестность этой точки определяет основной вклад в интеграл (17.8) при больших положительных  $\nu$ . Этот случай может быть исследован аналогично, в рамках разложения функции  $f(x)$  вблизи  $a$  или  $b$ . Тогда можно ограничиться линейным членом разложения функции  $f(x)$  по  $x - a$  или  $x - b$  (если только этот член разложения не равен нулю), что упрощает анализ.

#### D. Обобщенный метод перевала

Обобщенный метод перевала применим к интегралам типа

$$\int_a^b dz \exp[S(z)] \quad (17.10)$$

при выполнении определенных условий на функцию  $S(z)$ . Прежде всего мы будем предполагать, что функция  $S(z)$  аналитична вблизи пути интегрирования от  $a$  к  $b$  и, следовательно, контур интегрирования можно деформировать в области аналитичности  $S(z)$ . Далее, мы будем предполагать, что в области аналитичности имеется по крайней мере одна точка с нулевой производной  $S'(z_0) = 0$  и что контур интегрирования можно деформировать таким образом, чтобы он проходил через  $z_0$ , причем действительная часть  $S(z)$  должна достигать в точке  $z_0$  максимума при движении вдоль деформированного контура. Тогда точка  $z_0$  называется седловой, поскольку для направления, перпендикулярного контуру, действительная часть  $S(z)$  достигает в точке  $z_0$  минимума.

Если в седловой точке действительная часть  $S(z)$  достигает абсолютного максимума вдоль контура интегрирования, то можно надеяться, что именно окрестность седловой точки даст главный вклад в интеграл (17.10). Разложим  $S$  в ряд Тейлора вблизи седловой точки:  $S \approx S_0 + S_0''(z - z_0)^2/2$ , где  $S_0$  и  $S_0''$  — значения функции  $S$  и ее второй производной в точке  $z = z_0$ . Если  $S$  достаточно быстро меняется вблизи седловой точки, то главный вклад в интеграл дает узкая окрестность седловой точки  $z = z_0$ , и мы можем ограничиться в интеграле (17.10) этим разложением, распространив интегрирование до бесконечности в обе стороны. Тогда мы приходим к Гауссовому интегралу, который дает

$$\int_a^b dz \exp[S(z)] \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-S_0''}} \exp(S_0). \quad (17.11)$$

Подчеркнем, что обе величины,  $S_0$  и  $S_0''$ , могут быть комплексными. Знак перед квадратным корнем определяется направлением, в котором контур интегрирования проходит через седловую точку. Условием применимости приближения (17.11) является значительное изменение функции  $S(z)$  в области применимости приведенного разложения, то есть  $|S_0''|R^2 \gg 1$ , где  $R$

— радиус сходимости разложения функции  $S(z)$  в ряд Тейлора около точки  $z = z_0$ .

В области аналитичности функции  $S(z)$  может оказаться несколько седловых точек. В этом случае надо выбрать ту из них, в которой  $\text{Re}S_0$  максимальна, поскольку именно окрестность этой точки дает главный вклад в интеграл (17.10). Возможно также вырождение, когда действительные части  $S$  в нескольких седловых точках одинаковы (или мало отличаются). Тогда для оценки интеграла (17.10) надо брать сумму выражений (17.11) для этих седловых точек.

Рассмотренные выше метод стационарной фазы и метод перевала могут рассматриваться, как частные случаи обобщенного метода перевала.

#### E. Метод WKB

Вернемся к однородному уравнению (2.5), где в операторе Штурма-Лиувилля (2.6)  $Q = 0$ :

$$\frac{d^2}{dx^2} f + U f = 0. \quad (17.12)$$

Предположим, что величина  $p = \sqrt{-U}$  меняется достаточно медленно на масштабе  $p^{-1}$ , что означает выполнение неравенства  $dp/dx \ll p^2$ . Тогда для функции  $f$  можно построить следующее приближенное решение

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{p}} \exp(S) + \frac{C_2}{\sqrt{p}} \exp(-S), \quad (17.13)$$

$$S(x) = \int^x dy p(y), \quad (17.14)$$

где  $C_1, C_2$  — некоторые константы. Выражение (17.13) было получено Вентцелем (Wentzel), Крамерсом (Kramers) и Бриллюэном (Brillouin) и носит название приближения WKB, что является аббревиатурой имен этих авторов.

Подставляя выражение (17.13) в уравнение (17.12), можно убедиться, что оно является решением, если пренебречь членами с  $(dp/dx)^2$  и  $d^2p/dx^2$ . Первое пренебрежение возможно в силу предполагаемого неравенства  $dp/dx \ll p^2$ , а второе в силу неравенства  $d^2p/dx^2 \ll p dp/dx$ , которое получается из предыдущего дифференцированием по  $x$ .

Фактор  $U$  в уравнении (17.12) может быть как отрицательным, так и положительным, к обоим этим случаям одинаково применим метод WKB. В первом случае величина  $p$  является действительной, и два слагаемых в выражении (17.13) являются растущей и убывающей по  $x$  экспонентами. Во втором случае величина  $p$  является чисто мнимой, и мы имеем дело с экспонентами от мнимых величин  $S$ . Другими словами, мы имеем дело с осциллирующими функциями, если речь идет о действительных решениях.

## Ф. Нётеровские интегралы движения

Многие эволюционные дифференциальные уравнения приводят к сохранению некоторых величин, которые называют интегралами движения. Наличие интегралов движения облегчает анализ решений соответствующего уравнения, и потому их нахождение является важной задачей. Здесь мы изложим способ нахождения интегралов движения, связанных с непрерывной симметрией уравнения, который был разработан Нётер. Поэтому соответствующие интегралы движения называются Нётеровскими.

Нётеровские интегралы возникают в том случае, если исследуемое уравнение является следствием вариационного принципа. А именно, рассмотрим дифференциальное уравнение для поля  $u$ , которое получается, как экстремум функционала

$$S = \int dt dr L(u, \dot{u}, \nabla u). \quad (17.15)$$

Обычно этот функционал называют действием. Условие экстремума действия дает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} + \nabla \frac{\partial L}{\partial \nabla u} = \frac{\partial L}{\partial u}, \quad (17.16)$$

которому подчиняется поле  $u$ .

Уравнение (17.16) или действие (17.15) однородны в пространстве и времени, то есть инвариантны относительно сдвига начала отсчета времени или сдвига начала координат. При инфинитезимальном сдвиге начала отсчета времени поле  $u$  изменяется, это изменение равно  $\delta u = \tau \partial_t u$ , где  $\tau$  – величина сдвига. Легко проверить непосредственно, что действие (17.15) не меняется при таком преобразовании. Предположим теперь, что  $\tau$  – некоторая функция пространства и времени. Тогда вариация действия  $S$  при преобразовании  $\delta u = \tau \partial_t u$  уже не будет равна нулю, ее можно записать в следующем виде

$$\delta S = \int dt dr \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - L \right) \dot{\tau} + \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \dot{u} \nabla \tau \right], \quad (17.17)$$

где мы использовали интегрирование по частям и соотношение

$$\partial_t L = \frac{\partial L}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \ddot{u} + \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \dot{\nabla} u.$$

С другой стороны, для поля  $u$ , которое подчиняется уравнению движения (17.16), вариация действия (17.16) при любой вариации поля  $u$ , в том числе и при вариации  $\delta u = \tau \partial_t u$ , должно быть равно нулю. Другими словами, для поля  $u$ , которое подчиняется уравнению движения (17.16), равно нулю выражение (17.17). Поскольку поле  $\tau$  в выражении (17.17) является произвольной функцией времени и пространства, мы приходим к соотношению

$$\partial_t \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} - L \right) + \nabla \left( \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \dot{u} \right) = 0, \quad (17.18)$$

которое имеет вид локального закона сохранения. Обычно закон (17.18) называют законом сохранения энергии, а сохраняющийся вследствие этого уравнения интеграл

$$E = \int dr \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} - L \right), \quad (17.19)$$

называют энергией. Закон сохранения энергии имеет вид  $\partial_t E = 0$ .

С формальной точки зрения, закон сохранения энергии (17.18) следует из того, что в выражении (17.17) для вариации действия присутствуют только производные (по времени и пространству) от поля  $\tau$ , но не само  $\tau$ . В свою очередь, это свойство следует из инвариантности действия по отношению к сдвигу начала отсчета времени, которое соответствует  $\tau = \text{const}$ . Поэтому при не зависящем от времени и координат поле  $\tau$  вариация действия обязана обращаться в ноль, что и объясняет отсутствие членов с  $\tau$  (без производных) в вариации (17.17). Понятно, что таким же образом будут получаться законы сохранения в том случае, если действие инвариантно относительно преобразования поля  $u$ , которое характеризуется некоторым непрерывным параметром типа  $\tau$ . Поэтому иногда говорят, что Нётеровские интегралы движения являются следствием непрерывной симметрии действия. Дискретная же симметрия (типа инвариантности действия относительно изменения знака поля  $u$ ) законов сохранения не дает.

Рассмотрим закон сохранения, который получается из инвариантности действия относительно сдвига начала координат. При инфинитезимальном сдвиге начала координат поле  $u$  изменяется, это изменение равно  $\delta u = \xi \nabla u$ , где  $\xi$  – величина сдвига. Считая теперь, что  $\xi$  является произвольной функцией времени и пространства, вычисляя вариацию действия (17.15) при вариации  $\delta u = \xi \partial_x u$  и приравнявая результат к нулю (что справедливо для поля  $u$ , подчиняющемуся уравнению движения), находим

$$\partial_t \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \nabla \left( \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (17.20)$$

Аналогичные уравнения справедливы и для остальных координат. Таким образом, мы приходим к закону сохранения величины

$$\mathbf{P} = \int dr \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \nabla u, \quad (17.21)$$

которую обычно называют импульсом. Закон сохранения импульса имеет вид  $\partial_t \mathbf{P} = 0$ .

Чтобы проиллюстрировать возникновение Нётеровских интегралов движения, не связанных с однородностью в пространстве и времени, рассмотрим случай, когда интересующее нас поле является комплексным. Обозначим его  $\psi$ . В этом случае действие  $S$  можно записать в виде

$$S = \int dt dr L(\psi, \psi^*, \dot{\psi}, \dot{\psi}^*, \nabla \psi, \nabla \psi^*). \quad (17.22)$$

Мы записали зависимость  $L$  от  $\psi$  и сопряженного ему поля  $\psi^*$  отдельно, поскольку в силу того, что поле  $\psi$  имеет две компоненты (действительную и мнимую части) уравнения движения на  $\psi$  или  $\psi^*$  можно получить независимым варьированием по  $\psi$  или  $\psi^*$ .

Теперь предположим, что действие (17.22) инвариантно относительно сдвига фазы (что справедливо, например, для НУШ). Для инфинитезимального сдвига это преобразование имеет вид  $\delta\psi = i\alpha\psi$ ,  $\delta\psi^* = -i\alpha\psi^*$ . Инвариантность действия относительно этого преобразования означает, что

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} \psi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \nabla \psi} \nabla \psi - \frac{\partial L}{\partial \psi^*} \psi^* - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} \dot{\psi}^* - \frac{\partial L}{\partial \nabla \psi^*} \nabla \psi^* = 0.$$

Считая теперь, что  $\alpha$  является произвольной функцией времени и пространства, вычисляя вариацию действия (17.22) при вариации  $\delta\psi = i\alpha\psi$ ,  $\delta\psi^* = -i\alpha\psi^*$

и приравнивая результат к нулю (с использованием приведенного выше выражения), находим закон сохранения

$$i\partial_t \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \psi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} \psi^* \right) + i\nabla \left( \frac{\partial L}{\partial \nabla \psi} \psi - \frac{\partial L}{\partial \nabla \psi^*} \psi^* \right) = 0. \quad (17.23)$$

Таким образом, мы приходим к закону сохранения величины

$$N = \int d\mathbf{r} i \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \psi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} \psi^* \right), \quad (17.24)$$

которую называют числом частиц или волновым действием. Закон сохранения имеет вид  $\partial_t N = 0$ .

- 
- [1] И. В. Колоколов и др., Задачи по математическим методам физики, Москва, Эдиториал УРСС, 2009.
- [2] Н. А. Кудряшов, Методы нелинейной математической физики, Долгопрудный, Интеллект, 2010.
- [3] А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров, Специальные функции математической физики, Долгопрудный, Интеллект, 2007.
- [4] Д. А. Шапиро, Конспект лекций по математическим методам физики, части 1,2, Новосибирск, НГУ, 2004.
- [5] М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Лань, СП, 2002.
- [6] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, Лань, СП, 2008.
- [7] Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, Лань, СП, 2001.
- [8] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, Теория солитонов, Москва, Наука, 1980.
- [9] И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, гл. Специальные функции, Москва, Физматгиз, 1962.
- [10] Н. М. Гюнтер и Р. О. Кузьмин, Сборник задач по высшей математике, части 1 и 2, Физматгиз, 1958.
- [11] Дж. Мэтьюз, Р. Уокер, Математические методы физики, Москва, Атомиздат, 1972.
- [12] М. Ф. Федорюк, Асимптотика: Интегралы и ряды, СМБ, Наука, Москва, 1987.
- [13] Ф. Олвер, Асимптотика и специальные функции, Наука, Москва, 1990.
- [14] Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы математической физики, в 2 т., ИЛ, Москва, 1958.
- [15] А. Найфэ, Методы возмущений, Мир, Москва, 1976.
- [16] Б. Г. Коренев, Введение в теорию бесселевых функций, Наука, Москва, 1971.